normalles
Familles et quasi-normales de
Fonctions méromorphes.

Georges Valiron

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C[ie],
82895 Quai des Grands-Augustins, 55.

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XXXVIII

Familles normales et quasi-normales de Fonctions méromorphes

PAR M. G. VALIRON

Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1929

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

FAMILLES NORMALES ET QUASI-NORMALES

DE

FONCTIONS MÉROMORPHES

Par M. G. VALIRON
(Strasbourg)

I. — Introduction.

1. Historique. Questions à étudier. — Vers 1900 les développements de la théorie des ensembles et les nécessités des applications (problème de Dirichlet, calcul des variations) ont conduit à une étude approfondie des familles de fonctions réelles fermées. Dans sa Thèse, P. Montel, après avoir étudié les familles réelles, envisagea à un point de vue analogue les familles de fonctions holomorphes et montra notamment que la famille des fonctions bornées dans leur ensemble dans un domaine est fermée. Ce résultat fondamental domine la théorie des familles normales. En 1911 parut un mémoire de Carathéodory et Landau, dans lequel les auteurs définissent la convergence uniforme des fonctions méromorphes et mettent en évidence le lien entre l'étude des suites méromorphes convergentes et le théorème de Picard. A la même époque, P. Montel donna à sa théorie sa terminologie et son essor définitif, notamment dans ses beaux mémoires de 1912 et 1916 qui contiennent en germe un grand nombre des perfectionnements ultérieurs. P. Montel y définit les familles normales, étend à ces familles les propriétés des familles bornées, montre que le théorème de Stieltjes-Vitali est valable pour ces familles, étudie la valence de leurs fonctions, établit que les fonctions admettant trois valeurs exceptionnelles forment une famille normale et apporte des compléments nouveaux dans l'étude des valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point essentiel. Ces derniers résultats

conduisirent G. Julia a de remarquables propositions, reprises et complétées par A. Ostrowski qui, grâce à l'introduction de la notion de continuité sphérique, donne une grande unité aux énoncés et établit l'équivalence des familles normales et des familles également continues sur la sphère. D'autre part A. Bloch indique un critère très simple de famille normale d'une nature essentiellement nouvelle.

L'étude des familles quasi-normales fut poursuivie par P. Montel surtout depuis 1921 et lui donna des résultats nouveaux : extensions des théorèmes de Schottky et Landau, propositions relatives au domaine décrit par les valeurs d'une fonction, etc. La méthode des familles normales et quasi-normales s'est révélée dans ces questions comme un instrument simple, souple et très puissant; d'autres méthodes ont pu donner dans certains cas des résultats plus précis, mais dans beaucoup d'autres les propositions obtenues par la méthode de P. Montel attendent encore des démonstrations directes. Cette méthode est d'une application commode dans l'étude de la représentation conforme, P. Fatou et G. Julia ont montré qu'elle joue un rôle essentiel dans la théorie de l'itération des fractions rationnelles (1). Il n'est pas de question de convergence où elle n'intervienne avec succès, elle a désormais sa place marquée dans tout les traités d'analyse.

La théorie elle-même atteint aujourd'hui une grande perfection; c'est surtout la recherche de nouveaux critères de familles normales ou quasi-normales que l'on pourra aborder. C'est d'ailleurs par des méthodes extérieures à la théorie des familles normales que cette recherche doit être poursuivie. A. Bloch a obtenu à cet égard des propositions très intéressantes, données en partie dans le dernier chapitre de cet exposé, propositions dont la démonstration pourra sans doute être simplifiée; il y a là tout un champ nouveau de recherches. Dans une telle étude on pourra se guider sur ce fait toujours vérifié jusqu'ici : si une propriété ne peut appartenir à aucune fonction entière non constante (ou à aucune fonction méromorphe), les fonctions jouissant de cette propriété dans un domaine forment une famille normale. Ainsi, au théorème de Liouville correspond le théorème fondamental sur les fonctions bornées, au théorème

---

(1) Il ne sera pas question de ces applications dans ce fascicule, ni de celle à la décomposition en facteurs des fonctions entières (*voir* fascicule II, n° 18).

de Picard la proposition sur les fonctions admettant trois valeurs exceptionnelles, etc. On peut faire une remarque analogue pour les familles quasi-normales.

On pourra également aborder l'étude des familles quasi-normales quelconques, en particulier de celles dont toutes les fonctions limites ne sont pas méromorphes.

2. **Rappel de définitions et propositions classiques.** — Nous appellerons domaine un ensemble de points tous intérieurs et bien enchaînés. La frontière du domaine est l'ensemble des points limites des points du domaine qui n'appartiennent pas au domaine. Un domaine est borné lorsque le point à l'infini n'appartient ni au domaine ni à sa frontière. Un domaine borné est simplement connexe si l'intérieur de toute ligne polygonale simple fermée intérieure au domaine appartient au domaine. Un domaine D_1 est dit complètement intérieur à un autre domaine D lorsque les points de D_1 et de sa frontière appartiennent à D.

Soit D un domaine ne contenant pas le point à l'infini et soit E l'ensemble des points de D dont la distance à la frontière est inférieure ou égale à ε et dont la distance à l'origine est inférieure ou égale à $\frac{1}{\varepsilon}$ (E existe si ε est assez petit). Chaque point P de E est intérieur à un cercle C(P) appartenant à D dont le rayon pourra être défini d'après une certaine loi. En appliquant le théorème de Borel-Lebesgue, on voit que E est intérieur à un ensemble $D(\varepsilon)$ d'un nombre fini de domaines complètement intérieurs à D et limités par des arcs de cercles. Lorsque ε tend vers zéro, $D(\varepsilon)$ tend vers D. Ceci reste vrai si le point à l'infini appartient à D (on supprime alors la seconde condition imposée à E).

D étant un domaine ne comprenant pas le point à l'infini, D_1 un domaine complètement intérieur à D dont la frontière est constituée d'un nombre fini de courbes simples sur lesquelles on peut définir l'intégrale d'une fonction continue, et $f(z; n)$ étant une suite infinie de fonctions de la variable z toutes holomorphes dans D ($n = 1, 2, \ldots$). Weierstrass a montré que :

1. *Si la suite $f(z; n)$ converge uniformément sur la frontière de D_1, elle converge aussi uniformément dans D_1, la fonction limite $F(z)$ est holomorphe dans D_1, la suite des dérivées*

d'ordre p, $f^{(p)}(z; n)$, converge vers $F^{(p)}(z)$ dans D_1, la convergence étant uniforme dans tout domaine complètement intérieur à D_1.

Nous dirons avec P. Montel (b) *que la suite $f(z; n)$ converge uniformément à l'intérieur d'un domaine* D lorsqu'il y a convergence uniforme au sens ordinaire dans tout domaine complètement intérieur à D. (Si le point à l'infini appartient à D, les nombres $f(\infty; n)$ convergent vers un nombre a et $|f(z; n) - a| < \varepsilon$ si $|z| > A(\varepsilon)$ et n assez grand). D'après le théorème I la fonction limite $F(z)$ est holomorphe dans D si les $f(z; n)$ sont holomorphes.

Une fonction holomorphe ou méromorphe dans un domaine est complètement déterminée par ses valeurs en une suite infinie de points admettant un point limite intérieur au domaine. Si une suite (¹) de fonctions $f(z; n)$ holomorphes dans D converge uniformément à l'intérieur de D vers une fonction $F(z)$ non identiquement nulle et si D_1 est un domaine complètement intérieur à D dont la frontière ne contient pas de zéros de $F(z)$, les $f(z; n)$ ont le même nombre de zéros que $F(z)$ dans D_1 dès que n est assez grand. Les zéros de $F(z)$ sont les positions limites de ceux de $f(z; n)$.

II. — Propriétés générales des familles normales.

3. **Théorème fondamental de Montel sur les fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble.** — P. Montel (b) dit que des fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine D *sont bornées dans leur ensemble à l'intérieur de* D lorsque, dans tout domaine D′ complètement intérieur à D, le module d'une fonction $f(z)$ quelconque de la famille est inférieur à un nombre fixe M(D′). Lorsque le nombre M(D′) ne dépend pas de D′, nous dirons que la famille est bornée *au sens strict* dans D. P. Montel (a) a établi cette proposition fondamentale :

II. *De toute suite de fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble à l'intérieur d'un domaine* D, *on peut extraire une*

(¹) Dorénavant on dira simplement suite pour suite infinie.

autre suite qui converge uniformément à l'intérieur de D *vers une fonction holomorphe (ou vers une constante finie).*

Considérons d'abord une suite $f(z; n)$ strictement bornée dans le cercle $|z| < r$, le module étant moindre que M. Posons

$$(1) \qquad f(z; n) = c_0^n + c_1^n z + \ldots + c_p^n z^p + \ldots$$

Les coefficients c vérifient les inégalités de Cauchy,

$$(2) \qquad |c_p^n| r^p \leqq M.$$

Le reste de toute série (1) dont les coefficients vérifient (2) est uniformément moindre qu'un nombre ε dans un cercle $|z| \leqq \rho < r$ dès que le rang du premier terme de ce reste est supérieur à $n(\varepsilon)$.

On peut extraire de la suite c_0^n $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite d'indices supérieurs n_p^0 $(p = 0, \ldots)$ convergeant vers un nombre γ_0 qui vérifie encore l'inégalité (2) correspondante. De la suite c_1 d'indices supérieurs n_p^0 on peut extraire une nouvelle suite d'indices supérieurs n_p^1 convergeant vers un nombre γ_1 qui vérifie encore (2) $(p = 1)$, etc. La fonction

$$F(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_n z^n + \ldots$$

est holomorphe pour $|z| < r$, ses coefficients vérifient (2), son reste est moindre que ε dans les conditions indiquées. On en déduit sans peine que la suite diagonale des suites

$$f(z; n_p^q),$$

soit

$$f(z; n_0^0), \quad f(z; n_1^1), \quad \ldots, \quad f(z; n_q^q), \quad \ldots$$

converge uniformément vers $F(z)$ pour $|z| \leqq \rho < r$.

Passons alors au cas général. Soient un domaine D et une suite $f(z; n)$. Si $D(\varepsilon)$ est un groupe de domaines intérieurs à D défini au n° 2 et formé de cercles C(P) dont le rayon est la moitié de la plus courte distance de P à la frontière de D, le résultat précédent s'applique à chaque cercle de centre P complètement intérieur à D; on pourra former une suite extraite de $f(z; n)$ convergeant uniformément dans le premier de ces cercles C(P), puis extraire de celle-là une nouvelle suite convergeant en outre dans le second cercle, etc. Au bout d'un nombre fini d'opérations on a une suite convergeant uniformément dans $D(\varepsilon)$. Donnons à ε une suite de valeurs tendant vers zéro et con-

sidérons les suites correspondantes, chacune étant extraite de la précédente. La suite diagonale de ces suites converge uniformément à l'intérieur de D.

Ce procédé des extractions successives et du passage à la suite diagonale sera d'un emploi constant dans cette théorie.

4. Convergence uniforme des fonctions méromorphes. Définition des familles normales. — On dit, d'après Landau et Carathéodory et Montel, *qu'une suite de fonctions* $f(z; n)$, *méromorphes dans un domaine* D, *converge uniformément à l'intérieur de* D *lorsque tout point* P *de* D *est centre d'un cercle* C_P *dans lequel l'une des suites* $f(z; n)$ *ou* $\frac{1}{f(z; n)}$ *est constituée de fonctions holomorphes à partir d'une valeur de* n *et converge uniformément au sens ordinaire du mot.* Nous désignerons la fonction limite par $F(z)$ dans le premier cas et par $\frac{1}{F(z)}$ dans le second. Si $F(z)$ est constant et égal à a dans un cercle C_P, il en est de même dans tous les autres : si a est fini, les $f(z; n)$ sont holomorphes pour $n > N(D')$ dans tout domaine D′ complètement intérieur à D et y convergent au sens ordinaire du mot; si a est infini, la suite $\frac{1}{f(z; n)}$ converge uniformément vers zéro dans tout D′, *on dit alors que la suite* $f(z; n)$ *converge uniformément vers l'infini à l'intérieur de* D. Lorsque $F(z)$ n'est pas constant, c'est une fonction holomorphe dans les cercles de convergence des $f(z; n)$, méromorphe dans ceux où $\frac{1}{f(z; n)}$ converge sans que $f(z; n)$ converge, $F(z)$ est donc méromorphe ou holomorphe dans D, c'est la fonction limite des $f(z; n)$. Si D′ est un domaine complètement intérieur à D et si l'on exclut le voisinage des pôles de $F(z)$ intérieurs à D′, dans le domaine restant les $f(z; n)$ convergent au sens habituel vers $F(z)$, de même les $\frac{1}{f(z; n)}$ convergent uniformément vers $\frac{1}{F(z)}$ dans D′ privé du voisinage des zéros de $F(z)$. Les pôles et les zéros de $F(z)$ intérieurs à D′ sont donc points limites de pôles et zéros des $f(z; n)$ et inversement. $F(z)$ est holomorphe lorsque les $f(z; n)$ sont holomorphes dans D ou lorsque, ces fonctions étant méromorphes, les seuls points limites des pôles sont sur la frontière de D.

En particulier, pour une suite de fonctions holomorphes, la convergence uniforme à l'intérieur de D au sens actuel (sens large) signifie la convergence uniforme à l'intérieur de D vers une fonction holomorphe ou une constante finie, ou bien la convergence uniforme vers l'infini.

Si une suite $f(z;n)$ converge uniformément à l'intérieur de D, il en est de même de la suite $R[f(z;n)]$ où $R(u)$ est une fraction rationnelle. L'addition ou la multiplication des fonctions de même rang de deux suites uniformément convergentes ne conduit pas toujours à une autre suite uniformément convergente (ni même convergente). Mais si les fonctions $a(z;n)$, $b(z;n)$, $c(z;n)$, $d(z;n)$ convergent uniformément vers des constantes a, b, c, d finies, avec $ad - cb \neq 0$, la transformation homographique

$$\frac{a(z;n)f(z;n)+b(z;n)}{c(z;n)f(z;n)+d(z;n)}$$

transforme une suite f convergente en une suite convergente (uniformément) [21, b].

Une transformation conforme simple sur z, transformant D en D', transforme une suite uniformément convergente dans D en une suite uniformément convergente dans D'. Enfin, si D ne comprend pas le point à l'infini à son intérieur, et si $k(z;n)$ converge uniformément vers 1 dans D, les suites $f(z;n)$ et $f[k(z;n)z;n]$ convergent uniforment en même temps dans D et y ont la même fonction limite [Ostrowski (b), *voir* aussi (32, b)].

Car z_0 étant un point de D et $F(z)$ la fonction limite des $f(z;n)$, supposée par exemple finie en z_0; $f(z;n)$, converge uniformément et est uniformément bornée pour $|z-z_0|<r$, $f'(z;n)$ est uniformément borné pour $|z-z_0|<\frac{1}{2}r$, donc dans ce cercle,

$$\begin{aligned}&|F(z)-f[k(z;n)z;n]|\\&\quad<|F(z)-f(z;n)|+|[k(z;n)-1]z f'\{z+[k(z;n)-1]\theta z;n\}|,\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

Une famille de fonctions méromorphes dans un domaine D *est normale dans* D *lorsque, de toute suite de fonctions de la famille, on peut extraire une autre suite uniformément convergente à*

l'intérieur de D. *La famille est dite normale en un point* P *de* D *lorsqu'elle est normale dans un cercle de centre* P [Montel(**b**, **c**)].

Le théorème de Borel-Lebesgue et le procédé des extractions successives et du passage à la suite diagonale permet de passer de la propriété locale à la propriété générale.

III. *Pour qu'une famille méromorphe soit normale dans un domaine* D, *il faut et il suffit qu'elle soit normale en chaque point de* D [Montel (**b**)].

Des fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble dans un domaine D constituent une famille normale dans D en vertu du théorème II. En faisant une transformation homographique à coefficients constants, on obtient cette généralisation :

IV. *Les fonctions méromorphes dans un domaine* D *qui ne prennent pas les valeurs* Z *appartenant à un domaine* Δ *constituent une famille normale dans* D [Montel (**c**)].

On peut généraliser en faisant une transformation homographique à coefficients variables.

5. Applications à l'étude de la convergence des suites. Théorème de Vitali. — Les fonctions des suites normales jouissent de propriétés qui conduisent aisément à des propositions sur la convergence uniforme. Nous nous appuierons sur cette propriété générale :

V. *Les fonctions* $f(z; n)$ *d'une suite normale dans un domaine* D *ne peuvent converger en chaque point de* D *vers les valeurs d'une fonction* $F(z)$ *méromorphe dans* D [1] *sans que la convergence soit uniforme à l'intérieur de* D [17, **b**; 11, **b**].

Car, en supposant pour fixer les idées, que $F(z)$ est holomorphe dans un domaine D′ complètement intérieur à D et que la convergence n'y est pas uniforme, on aurait, pour une suite de n et de points z_n correspondants de D′,

$$|f(z_n; n) - F(z_n)| \geq \alpha > 0.$$

[1] On entendra dorénavant par fonction méromorphe : une fonction méromorphe proprement dite, ou une fonction holomorphe, ou une constante finie ou infinie.

Or, on peut extraire de cette suite $f(z; n)$ une autre suite qui converge uniformément dans D vers une fonction méromorphe qui est nécessairement $F(z)$, ce qui contredit l'inégalité précédente.

En s'appuyant sur la proposition relative à la détermination d'une fonction méromorphe, on déduit de là que :

VI. *Si une suite de fonctions méromorphes est normale dans* D *et si les fonctions de cette suite convergent (au sens large) en des points de* D *admettant un point limite intérieur à* D, *elles convergent uniformément à l'intérieur de* D.

Car toutes les fonctions limites sont égales, si $F(z)$ est la valeur commune, $f(z; n)$ converge nécessairement vers $F(z)$ en tout point de D et le théorème V s'applique. On peut également déduire du théorème V cette proposition qui sera utilisée plus loin :

VII. *Si une suite de fonctions méromorphes $f(z; n)$ est normale dans un domaine* D *et si, à chaque n correspond un ensemble* $E(n)$ *de points en lesquels $f(z; n) - F(z)$ tend uniformément vers zéro* (1), $F(z)$ *étant méromorphe dans* D, *la suite $f(z; n)$ converge uniformément vers* $F(z)$ *à l'intérieur de* D *pourvu que toute suite d'ensembles* $E(n)$ *admette un ensemble limite* E *ayant un point d'accumulation intérieur à* D.

Le théorème VI énoncé par M. P. Montel (pour les fonctions holomorphes) renferme des propositions obtenues par divers auteurs. Pour une famille bornée on a le théorème de Vitali ([34], *voir* aussi Porter [24]) :

VIII. *Une suite de fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble à l'intérieur d'un domaine* D *converge uniformément vers une fonction holomorphe à l'intérieur de* D *dès qu'elle converge au sens ordinaire en une suite de points de* D *admettant un point limite intérieur à* D.

Cette proposition renferme elle-même celle qui avait été donnée en 1895 par Stieltjes [31] (qui correspond au cas où la suite converge dans tout un domaine intérieur à D) et qui fut ensuite généralisée

(1) Il suffit que la distance sphérique de $F(z)$ à $f(z; n)$ tende uniformément vers zéro.

par Osgood [20]. Landau et Carathéodory [8, c] ont énoncé une proposition voisine de VI et l'ont appliquée aux fonctions ne prenant pas trois valeurs exceptionnelles, fonctions qui forment une famille normale (*voir* chapitre III).

E. Lindelöf (a) a montré que l'on peut exposer les présents résultats en commençant par le théorème VI, d'où l'on passe à II. La marche suivie ici est celle de P. Montel.

6. **Représentation sphérique. Égale continuité. Théorème de A. Ostrowski.** — Considérons une famille de fonctions méromorphes $f(z)$, normale dans un domaine D. z_0 étant un point intérieur à D, portons d'abord l'attention sur les fonctions telles que $|f(z_0)| < 1$; a étant donné, il existe un cercle $|z - z_0| < b$ dans lequel $|f(z) - f(z_0)|$ est inférieur à a. Sinon on aurait

$$|f(z_0;\, n) - f(z_n;\, n)| \geqq a$$

pour une suite de n et de points z_n correspondants tendant vers z_0. Or on peut extraire de la suite $f(z;\, n)$ ainsi obtenue une autre suite qui converge uniformément vers une fonction nécessairement holomorphe en z_0, donc autour de z_0, d'où une contradiction. On raisonne de même avec $\frac{1}{f(z)}$ lorsque $|f(z_0)| \geqq 1$. En appliquant les théorèmes III et IV, on obtient ces propositions :

IX. *Pour qu'une famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans un domaine D soit normale, il faut et il suffit qu'à tout point z_0 de D et à tout nombre positif a, corresponde un cercle $|z - z_0| < b$ dans lequel on a*

$$|f(z) - f(z_0)| < a$$

ou

$$\left|\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)}\right| < a,$$

suivant que $|f(z_0)|$ est inférieur ou supérieur à 1.

X. *Pour qu'une famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans un domaine D soit normale, il faut et il suffit que, à chaque point z_0 de D corresponde un nombre $M(z_0)$ et un cercle $|z - z_0| < r(z_0)$ dans lequel on a, pour toute fonction de la famille, l'une ou

l'autre des inégalités.

$$|f(z)| < M(z_0), \qquad \left|\frac{1}{f(z)}\right| < M(z_0).$$

Ces propositions ne diffèrent que par la forme de celles que A. Ostrowski a obtenues en introduisant la représentation sphérique des valeurs des fonctions méromorphes. A. Ostrowski considère le point représentatif de $Z = f(z)$ non plus dans le plan, mais sur la sphère de Riemann. OXY étant le plan de la variable Z, on considère la sphère S de centre O et rayon 1 et l'un des points ω où la normale au plan en O coupe S. Au point P d'affixe Z du plan on fait correspondre le point ζ de la sphère situé sur ωP. La distance sphérique $|Z, Z'|$ de deux points Z, Z' est le plus petit arc de grand cercle joignant les points correspondants ζ, ζ'. On obtient aisément les relations suivantes :

$$|Z, Z'| \leqq |Z, Z''| + |Z'', Z'|,$$

$$\left|\frac{1}{Z'}, \frac{1}{Z}\right| = |Z, Z'|, \qquad |Z, Z+dZ| = \frac{2|dZ|}{1+|Z|^2},$$

si dZ est infiniment petit. Si $|Z| \leqq A$,

$$\frac{2 \operatorname{arc\,tang} A}{A} |Z| \leqq |0, Z| \leqq 2|Z|.$$

La définition de la convergence d'une suite de fonctions méromorphes prend une forme simple, car :

XI. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de fonctions $f(z; n)$ méromorphes dans un domaine* D *converge uniformément à l'intérieur de* D *est qu'à toute région* D' *complètement intérieure à* D *et à tout nombre positif* ε *corresponde un nombre* N(ε, D') *tel que, quel que soit* z *dans* D', *on ait*

$$(3) \qquad |f(z; n), f(z; m)| < \varepsilon$$

si n *et* m *sont supérieurs à* N(ε, D') [Ostrowski (b)].

La condition (3) entraîne d'abord la convergence en chaque point de D'. Si F(z) est la fonction limite et si $F(z_0) \neq \infty$ en un point z_0 de D', on a

$$|0, F(z_0)| = \pi - 4\alpha \qquad (\alpha > 0).$$

Pour n_0 supérieur à $N(\alpha, D')$, on aura

$$|f(z_0; n_0), o| \leqq |f(z_0; n_0), F(z_0)| + |F(z_0), o| < \pi - 3\alpha;$$

et $|f(z; n_0), o|$ sera encore moindre que $\pi - 2\alpha$ si $|z, z_0| < \eta$, donc d'après (3), $f(z; m)$ sera bornée dans ce cercle à partir d'une valeur de m, de sorte que la condition (3) devient la condition de convergence uniforme classique. Si $F(z_0)$ est infini, on raisonne de même sur la suite $\frac{1}{f(z; n)}$. La condition est bien suffisante. Elle est nécessaire en vertu du théorème de Borel-Lebesgue.

A. Ostrowski appelle *oscillation sphérique* des valeurs d'une fonction sur un ensemble E la borne supérieure de la distance sphérique de ses valeurs. *L'oscillation sphérique d'une famille* sur E est la borne supérieure des oscillations sphériques des fonctions de la famille. *L'oscillation en un point* est la limite des oscillations dans des domaines contenant ce point et tendant vers lui (elle est indépendante de leur forme). *Si l'oscillation sphérique est nulle en un point la fonction est dite continue sur la sphère en ce point;* si la valeur de la fonction est finie au point considéré, on retombe sur la continuité ordinaire. Une fonction méromorphe est sphériquement continue en ses pôles. *Si l'oscillation sphérique d'une famille est nulle en un point, la famille est dite également continue sur la sphère en ce point.* Pour les fonctions bornées on retombe sur l'égale continuité d'Arzelà [1].

Le théorème de Borel-Lebesgue permet de passer de la proposition locale à la proposition générale [Ostrowski, **b**].

XII. *Si une famille de fonctions méromorphes est également continue sur la sphère en tout point intérieur à un domaine* D, *elle est également continue à l'intérieur de* D *en ce sens que, à toute région fermée* D' *complètement intérieure à* D *et à tout nombre positif* ε *correspond un nombre* $\eta(\varepsilon, D')$ *tel que l'on ait*

$$|f(z), f(z')| < \varepsilon$$

pour tout couple de points z, z' *de* D' *dont la distance sphérique est inférieure à* $\eta(\varepsilon, D')$.

Moyennant ces définitions et ce théorème, le théorème XI s'énonce ainsi :

XIII. *Pour qu'une famille de fonctions méromorphes dans un domaine* D *soit normale, il faut et il suffit qu'elle soit également continue sur la sphère à l'intérieur de* D (Ostrowski).

7. Compléments sur les fonctions bornées dans leur ensemble. — Le théorème qui vient d'être donné contient des résultats sur les fonctions bornées dans leur ensemble obtenus antérieurement par P. Montel. En particulier :

XIV. *Une famille de fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble à l'intérieur d'un domaine est également continue au sens d'Arzelà.*

Des fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble à l'intérieur d'un domaine n'admettent pas de la fonction limite infinie. La réciproque est vraie. Car, si l'infini n'est pas fonction limite d'une famille normale holomorphe, les fonctions sont bornées dans leur ensemble en tout point z_0 du domaine (sans quoi, il aurait une fonction limite infinie en ce point, donc partout), et elles sont également continues sur la sphère, donc bornées dans leur ensemble autour de z_0, donc dans D′ intérieur à D d'après le théorème de Borel-Lebesgue. Ainsi :

XV. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de fonctions holomorphes soit formée de fonctions bornées dans leur ensemble à l'intérieur de* D *est qu'elle soit normale et n'admette pas l'infini comme fonction limite; il faut et il suffit qu'elle soit normale et que les fonctions soient bornées dans leur ensemble en un point de* D.

La famille formée par des primitives des fonctions d'une famille holomorphe bornée à l'intérieur de D est normale dans D, la famille des dérivées est normale et bornée (propositions qui ne sont pas toujours vraies pour une famille normale quelconque). Comme application on peut montrer que les fonctions holomorphes dans un domaine qui ne comprend pas le point à l'infini à son intérieur et telles que

$$(1)\qquad \int\int_{D} |f'(z)|^{\alpha}\, dx\, dy < M \qquad (\alpha > 0,\ z = x + iy),$$

forment une famille normale. On peut prendre pour D′ le cercle $|z| < 1$. L'hypothèse entraîne que

$$\iint_{|z|<1} \overset{+}{\log}|f'(z)|\, dx\, dy < \mathrm{M}'(\alpha) \tag{5}$$

$\left(\text{on pose } \overset{+}{u} = u \text{ si } u > 0 \text{ et } \overset{+}{u} = 0 \text{ si } u \leqq 0\right)$. En introduisant la fonction de R. Nevanlinna

$$m(r, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|g(re^{iu})|\, du, \tag{6}$$

on a

$$\int_0^1 m(r, f')\, r\, dr < \mathrm{M}'(\alpha).$$

On déduit de là que les $f'(z)$ sont bornés dans leur ensemble en utilisant la propriété de croissance de $m(r, g)$ et sa relation avec le maximum $\mathrm{M}(r, g)$ de $|g(re^{iu})|$ (*voir* fasc. II, n°s 22, 24). On pourra rechercher la meilleure limitation de $m(r, f')$ ou de $\mathrm{M}(r, f')$ résultant de (5) (*voir* [32, c]) [1].

En particulier, en appelant, avec P. Montel, *fonction multivalente d'ordre p* dans D une fonction qui prend p fois au plus la même valeur, on voit que les fonctions multivalentes qui donnent la représentation conforme d'un domaine D sur un domaine (p fois étendu) d'aire intérieure bornée forment une famille normale (*voir* n° 9 une proposition plus générale).

Le théorème de Vitali a reçu divers compléments dans le cas où les points de convergence n'ont de points limites que sur la frontière de D. Ce théorème repose sur le théorème V et sur la propriété de détermination unique d'une fonction méromorphe par ses valeurs en une infinité de points. Or cette propriété d'unicité reste vraie lorsque les points donnés convergent vers la frontière du domaine pourvu que la convergence ne soit pas trop rapide. Dans le cas où le domaine est le cercle $|z| < 1$, W. Blaschke [3] a donné un résultat que nous compléterons ci-dessous. $m(r, g)$ étant défini par l'égalité (6), le théorème de Jensen donne l'inégalité

$$\log \mathrm{M}(r, g) \geqq m(r, g) \geqq \mathrm{N}(r, g) + \mathrm{C} \qquad (r < 1) \tag{7}$$

---

(1) R. Nevanlinna a résolu la question posée à la fin de cette Note.

avec

$$N(r, g) = \int_0^r [n(x, g) - n(0, g)] \frac{dx}{x} + n(0; g) \log r.$$

$n(x, g)$ désignant le nombre des zéros de g dont le module est inférieur ou égal à x et C le logarithme du module du premier coefficient non nul du développement de Taylor de $g(z)$ autour de $z = 0$. Lorsque r tend vers 1, $N(r, g)$ converge en même temps que la série

$$(8) \qquad \Sigma(1 - |z_n|),$$

formée avec les modules des zéros z_n de $g(z)$. Il s'ensuit qu'une fonction holomorphe pour $|z| < 1$ et telle que $m(r, g)$ reste bornée est déterminée de façon unique par les valeurs qu'elle prend en des points z_n rendant divergente la série (8). Le théorème de Blaschke énoncé ci-dessous avec le complément qui y fut ajouté par R. et F. Nevanlinna [18] est une conséquence immédiate de cette remarque (*voir* aussi [25], [32, c]) :

XVI. *Si les fonctions $f(z; p)$ sont holomorphes pour $|z| < 1$ et si l'on a, quel que soit p et pour $r < 1$,*

$$m[r, f(z; p)] < M,$$

la convergence des $f(z; p)$ en une suite de points z_n tels que la série (8) *diverge entraîne la convergence uniforme à l'intérieur du cercle.*

Car toute fonction limite de la suite vérifie encore l'inégalité $m(r, F) < M$, elle est donc unique et le théorème V s'applique. La condition de divergence de la série (8) est essentielle, car il existe des fonctions holomorphes pour $|z| < 1$, s'annulant en des points tels que (8) converge et pour lesquelles la fonction $m(r)$ est bornée.

A toute hypothèse de l'une des formes

$$m(r, f) < \varphi(r), \qquad M(r, f) < \theta(r),$$

où les fonctions des seconds membres sont données et indéfiniment croissantes lorsque r tend vers 1, correspond un théorème du genre du précédent. On peut aussi varier ces conditions, supposer par

exemple que

$$\int_0^1 m(r, f)(1-r)^{k-1}\,dr$$

est uniformément borné ($k > 0$) (*voir* [32, c]).

Des extensions du théorème de Vitali qui ne se rattachent pas à la théorie actuelle ont été données par F. et M. Riesz [27] et par A. Ostrowski [a]. L'hypothèse est celle de la convergence en certains points du contour.

En ce qui concerne les fonctions méromorphes, la généralisation naturelle de l'hypothèse faite sur $m(r)$ est l'hypothèse analogue sur la fonction $T(r)$ de R. Nevanlinna

$$T(r, g) = m(r, g) + N\left(r, \frac{1}{g}\right)$$

(on suppose $g(z)$ holomorphe à l'origine). Ici encore les fonctions de la classe $T(r, f) < K$ pour $r < 1$ sont déterminées de façon unique par leurs valeurs en une suite de points rendant la série (8) divergente (certains de ces points, même une infinité d'entre eux, peuvent être des pôles), mais ces fonctions ne forment pas une famille normale, la famille est seulement quasi-normale (*voir* n° 16), de sorte que la généralisation de XVI est la suivante :

XVII. *Les fonctions d'une suite $f(z; p)$ méromorphes pour $|z| < 1$, appartenant à une famille normale et pour lesquelles $T(r, f)$ est uniformément moindre que M, convergent uniformément à l'intérieur du cercle vers une fonction méromorphe dès qu'elles convergent au sens large en une suite de points z_n rendant divergente la série* (8).

8. Étude des valeurs prises par les fonctions d'une famille normale. Applications. — On étudiera d'abord ici le nombre des points où les fonctions de la famille prennent une même valeur. Le théorème fondamental, dû encore à P. Montel (c), s'énonce ainsi en introduisant la distance sphérique :

XVIII. *Si les fonctions $f(z)$ appartiennent à une famille normale dans D et vérifient la condition $|f(z_0), a| > c$ en un point z_0 de D, à tout domaine D' complètement intérieur à D correspond un nombre $n(D', a, c)$ limitant le nombre des points de D' où $f(z) = a$.*

On peut supposer a infini, alors $|f(z_0)| < C(c)$. Si la proposition était fausse, il existerait une suite de fonctions $f(z; n)$ de la famille, $f(z; n)$ possédant n pôles dans D', l'infini serait la seule fonction limite possible pour les suites convergentes extraites de celle-là, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite en z_0.

Au lieu de supposer z_0 fixe, on peut le supposer fonction de f et intérieur à un domaine complètement intérieur à D; l'essentiel de l'hypothèse est que a ne soit pas fonction limite de la famille considérée. A. Ostrowski (b) a complété ce théorème dans deux directions :

XIX. *Étant donnés une famille normale dans* D *et un nombre positif* ε, *à tout domaine* D' *complètement intérieur à* D *correspond un nombre* $n(D', \varepsilon)$ *limitant le nombre des points de* D' *où* $f(z) = a$, *sauf pour les* a *dont la distance sphérique à un point* a_f *est inférieure à* ε.

Car, la propriété étant fausse, il existerait une suite $f(z; n)$ telle que $f(z; n)$ prenne n fois au moins deux valeurs Z_n, Z'_n de distance sphérique supérieure à ε. On en extrairait une suite uniformément convergente pour laquelle Z_n et Z'_n tendraient respectivement vers Z et Z' avec $|Z, Z'| \geq \varepsilon$, la fonction limite devrait être à la fois Z et Z'.

En modifiant dans un autre sens la démonstration de XVIII, on obtient ce second complément :

XX. *La famille* $f(z)$ *étant normale dans* D, *et* Δ *et* Δ' *étant deux régions de la sphère complètement extérieures l'une à l'autre, à tout* D' *appartenant complètement à* D *correspond un nombre* $n(D', \Delta, \Delta')$ *tel que toute* $f(z)$ *qui prend une valeur représentée dans* Δ' *prend au plus* $n(D', \Delta, \Delta')$ *fois les valeurs représentées dans* Δ.

Du théorème XIX découle ce corollaire que nous aurons à utiliser :

XXI. *Si la famille* $f(z)$ *est normale dans* D *et si les* a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *sont distincts, à tout domaine* D' *complètement intérieur à* D *correspond un nombre* $n(D', a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *qui limite, pour chaque* $f(z)$, *le nombre des racines intérieures à* D', *de* $k-1$ *des équations* $f(z) = a_i$.

Nous donnerons encore ici certains critères permettant de recon-

naître l'existence d'une fonction limite constante. Le premier a été employé par G. Julia [a] puis explicité par G. Valiron (a) et P. Montel (g).

XXII. *Si la suite $f(z; n)$ appartient à une famille normale dans* D, *et si dans un domaine* D′ *complètement intérieur à* D, *$f(z; n)$ ne prend pas la valeur a tandis que $|f(z_n; n), a|$ tend vers zéro, la suite donnée converge uniformément vers a à l'intérieur de* D (¹).

P. Montel (g) généralise dans le cas où a est fini, en supposant que $f(z; n) - a$ ne s'annule pas plus de k fois dans D′ tandis que $f(z_n; n) - a$, $f'(z_n; n)$, $f''(z_n; n)$, $\ldots$, $f^{(k)}(z_n; n)$ tendent vers zéro, z_n restant dans D′. On montre que z_0 étant un point limite des z_n, on obtient une fonction limite qui, si elle n'est pas a, doit s'annuler $k+1$ fois en ce point, ce qui est impossible d'après le n° 2. a est la seule fonction limite et les considérations du n° 5 s'appliquent.

D'après l'égale continuité sphérique, les points où une fonction $f(z)$ d'une famille normale prend une valeur a peuvent être entourés de cercles de même rayon dans lesquels la valeur de $f(z)$ est également voisine de a; en particulier, pour a infini :

XXIII. *Si la famille $f(z)$ est normale dans un domaine* D *ne contenant pas le point à l'infini à son intérieur, à ε positif donné et à* D′ *complètement intérieur à* D *correspond un nombre $\eta(\varepsilon, D')$ tel que, dans les cercles de rayon $\eta(\varepsilon, D')$ ayant pour centres les pôles de $f(z)$ intérieurs à* D′, *$|f(z)|$ soit supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$.*

P. Montel (c, f) a donné une proposition complémentaire, retrouvée et complétée par A. Ostrowski sous la forme suivante :

XXIV. *Étant donnée une famille $f(z)$ normale dans un domaine* D *ne contenant pas le point à l'infini à son intérieur, à tout domaine* D′ *complètement intérieur à* D, *à c positif fixe et arbitrairement grand, et ε positif fixe et arbitrairement petit correspond un nombre* M(D′, c, ε) *tel que, toute $f(z)$ de la famille dont le module est inférieur à c en un point de* D′ *a son module*

(¹) Voir aussi à ce sujet des notes récentes de M. Mandelbrojt.

inférieur à $M(D', c, \varepsilon)$ *en tout point de* D' *extérieur aux cercles de rayon* ε *ayant pour centres les pôles de* $f(z)$.

Si le théorème est vrai pour un ε, il est vrai pour les ε plus grands; on peut donc supposer 2ε moindre que la distance des frontières de D et D'. Si la propriété est fausse, il existe une suite $f(z; n)$ uniformément convergente à l'intérieur de D, $|f(z; n)|$ étant supérieur à n en quelque point de D' extérieur aux cercles en question. La fonction limite $F(z)$ est effectivement méromorphe dans D, ses pôles sont les points limites des pôles des $f(z; n)$ et ces points seulement. A l'extérieur des cercles Γ de rayon $\frac{1}{2}\varepsilon$ ayant pour centres les pôles de $F(z)$ intérieurs à D' ou à une distance de sa frontière moindre que ε, $F(z)$ est borné. Or tout cercle Γ contient un pôle de $f(z; n)$ si n est assez grand, $f(z; n)$ resterait donc borné dans D' à l'extérieur des cercles de rayon ε ayant pour centres ses pôles.

Les théorèmes XVIII et XXIV ne caractérisent pas les familles normales, nous les retrouverons pour certaines familles quasi-normales. Mais l'ensemble des propriétés énoncées dans les théorèmes XXIII et XXIV caractérise les familles normales [Ostrowski (b)]. Car z_0 étant un point de D, si la suite $f(z_0; n)$ converge vers une limite finie, z_0 n'est pas un point limite des pôles des $f(z; n)$ d'après XXIII, donc, dans un cercle $|z - z_0| < \alpha$, les $f(z; n)$ n'ont pas de pôles; elles sont bornées dans leur ensemble pour $|z - z_0| < \frac{1}{2}\alpha$ d'après XXIV. On raisonne de même si les $f(z_0; n)$ convergent vers l'infini.

D'après le théorème X, si la famille $f(z)$ est normale dans D, tout point z_0 de D est centre d'un cercle dans lequel $T[r, f(z - z_0)]$ ou $T\left(r, \frac{1}{f(z - z_0)}\right)$ est inférieur à un nombre $M(z_0)$. Inversement cette condition entraîne que la famille est normale, car

$$T[r, f(z - z_0)] < K$$

entraîne que $f(z - z_0)$ est holomorphe et bornée pour $|z - z_0| < re^{-2K}$. Les théorèmes XVIII et XIV conduisent aisément à cette conséquence : *pour qu'une famille de fonctions* $f(z)$ *méromorphes dans un domaine* D *soit normale, il faut et il suffit qu'à tout cercle* $|z - z_0| < R$ *complètement intérieur à* D *corresponde un nombre* $M(z_0, R)$ *tel que l'on ait pour toute fonction* $f(z)$ *l'une*

ou l'autre des deux inégalités

$$T[R, f(z-z_0)] < M(z_0, R),$$

$$T\left[R, \frac{1}{f(z-z_0)}\right] < M(z_0, R).$$

III. — Les fonctions a valeurs exceptionnelles. Applications.

9. Le théorème de Schottky-Landau et le théorème fondamental de Montel. — La plupart des résultats exposés dans ce chapitre découlent du théorème de F. Schottky donnant une limite supérieure du module des fonctions holomorphes dans le cercle $|z| < 1$ où elles ne prennent pas les valeurs 0 et 1 et dont la valeur est donnée à l'origine. L'inégalité la plus précise dans cet ordre d'idées a été obtenue par E. Landau au moyen de la fonction modulaire (*voir* fasc. II, n° 8, et fasc. XX, n° 41). Nous ferons ici usage des inégalités fournies par la méthode de R. Nevanlinna (**a**, **b**) qui conduit à un résultat moins précis, mais permet des généralisations aisées. En posant $c_0 = f(0)$, on trouve que $f(z)$ holomorphe et ne prenant pas les valeurs 0 et 1 pour $|z| < 1$ vérifie l'inégalité

$$(9) \qquad m(r, f) < \varphi(c_0)\frac{1}{1-r}\log\frac{2}{1-r}$$

et par suite

$$(10) \qquad \log|f(z)| < \theta(c_0)\frac{1}{(1-r)^2}\log\frac{2}{1-r},$$

$\theta(u)$ et $\varphi(u)$ restant bornés tant que u est borné. L'inégalité (9) se généralise, si $f(z)$ est méromorphe pour $|z| < 1$, holomorphe à l'origine et ne prend pas trois valeurs dont les distances sphériques sont supérieures à d, on a

$$T(r, f) < \chi[|f(0)|, d, r]$$

[32, j]. D'autre part, convenons de dire que la valeur a est quasi-exceptionnelle de poids $\left(1-\frac{1}{m}\right)$ lorsque les points en lesquels $f(z) = a$ sont d'ordre de multiplicité au moins égal à m (une valeur exceptionnelle, c'est-à-dire qui n'est pas prise, est de poids 1). On obtient cette proposition, qui comprend les précédentes [32; *d*].

Si $f(z)$ est méromorphe pour $|z| < 1$, est holomorphe pour $z = 0$ et admet q valeurs quasi-exceptionnelles (dont l'une peut être

infinie) dont la somme des poids est supérieure à 2 ($2 < q \leq 5$), *on a l'inégalité*

$$\mathrm{T}(r, f) < \frac{\theta[f(0)]}{1-r} \log \frac{2}{1-r}; \tag{11}$$

$\theta(u)$ *reste fini tant que u est fini et ne dépend que de la plus petite des distances sphériques mutuelles des valeurs exceptionnelles.*

Comme conséquence immédiate du théorème de Schottky et des théorèmes généraux sur les familles normales, on obtient le théorème fondamental de Montel.

XXV. *Les fonctions méromorphes dans un domaine* D *qui ne prennent pas dans ce domaine trois valeurs exceptionnelles fixes forment une famille normale.*

Le résultat reste vrai lorsque les valeurs exceptionnelles dépendent de la fonction considérée, mais ont une distance sphérique bornée inférieurement. La généralisation du théorème de Schottky donnée ci-dessus conduit aussi à un théorème de Bloch (**d**, **f**) qui généralise ceux obtenus antérieurement par C. Carathéodory (**a**, **b**), P. Montel (**c**) et P. Fatou :

XXVI. *Les fonctions méromorphes dans un domaine* D *qui admettent q valeurs quasi-exceptionnelles dont la somme des poids est supérieure à* 2 *forment une famille normale dans* D.

D'après ce qui précède, les fonctions $f(z)$ méromorphes dans un domaine D et telles que pour chaque $f(z)$ l'aire intérieure du domaine balayé par le point représentatif sur la sphère soit au plus $4\pi - a$ ($a > 0$) forment une famille normale, ce qui généralise un résultat antérieur de P. Montel (**c**) [1] (*voir* aussi [17, **h**]).

10. Familles non partout normales. Points de Julia. Théorèmes d'Ostrowski. — Nous considérerons ici une famille de fonctions méromorphes dans un domaine D, mais qui n'est pas normale dans D. C'est donc qu'il y a des points de D où la famille n'est pas normale [Julia (**a**, **b**)], un tel point est un *point de Julia, l'ensemble de ces*

---

[1] Cette démonstration m'a été communiquée (pour les fonctions holomorphes) par M. Montel.

points est l'ensemble de Julia ou ensemble J. Dès qu'il existe un point de Julia, il existe une suite au moins de fonctions de la famille dont on ne peut extraire aucune suite uniformément convergente à l'intérieur de D, c'est une *suite exceptionnelle dans* D. Une suite est *exceptionnelle en un point* P de D lorsque aucune suite extraite de celle-là ne converge uniformément dans un cercle de centre P et de rayon arbitrairement petit (Ostrowski). Tout point P auquel appartient une suite exceptionnelle est un point de Julia. Inversement, si z_0 est un point de Julia, l'oscillation sphérique de la famille en z_0 est égale à π (sinon la famille serait normale en P d'après le théorème IX), il existe donc une suite de fonctions $f(z; n)$ et de points correspondants z_n, z'_n tendant vers z_0 tels que

$$\lim | f(z_n; n), f(z'_n; n) | = \pi.$$

Aucune suite extraite de celle-ci ne peut converger dans un cercle de centre z_0. Par suite :

XXVII. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point* P *de* D *soit un point de Julia est qu'il existe une suite exceptionnelle en ce point. Lorsqu'une famille méromorphe dans* D *n'est pas normale, il existe au moins un point de* D *admettant une suite exceptionnelle* [Ostrowski (b)].

Le théorème de Montel (XXV) montre que P étant un point de Julia, les fonctions de toute suite extraite d'une suite exceptionnelle en ce point prennent dans leur ensemble toute valeur sauf deux au plus dans le voisinage de P. Inversement, supposons que toute suite extraite de $f(z; n)$ prenne toute valeur sauf deux au plus dans tout voisinage de P. Imaginons qu'une suite extraite de $f(z; n)$ converge dans un voisinage de P. Si la fonction limite est finie en P, les fonctions de la suite sont bornées dans leur ensemble autour de P, elles omettent de prendre plus de deux valeurs. Conclusion analogue si P est pôle de la fonction limite. Ainsi :

XXVIII. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite soit exceptionnelle en* P *est que les fonctions de toute suite extraite de celle-là prennent dans leur ensemble toute valeur sauf deux au plus dans tout voisinage de* P. [Ostrowski (b)].

Ce résultat est obtenu à partir du théorème de Montel sous la

forme XXV. En utilisant la remarque faite à la suite de ce théorème, on obtient un résultat plus précis.

XXIX. *Si une suite $f(z; n)$ est exceptionnelle en P, à tout ε positif et à tout cercle C de rayon d ayant P pour centre correspond un entier $N(\varepsilon, d)$ tel que, pour $n > N$, $f(z; n)$ prend toute valeur dans C sauf au plus celles appartenant à deux cercles de rayon ε tracés sur la sphère* (ces cercles dépendent de n) [Ostrowski (b)].

11. Application à l'étude d'une fonction dans le voisinage d'un point essentiel. Théorèmes de Julia. — P. Montel a appliqué la théorie des familles normales à la démonstration du théorème de Picard sur la distribution des valeurs d'une fonction dans le voisinage d'un point essentiel isolé. On sait depuis Weierstrass que la fonction est complètement indéterminée dans le voisinage d'un tel point. E. Picard a montré que la fonction prend effectivement toute valeur, sauf au plus deux valeurs dans le voisinage du point. La démonstration de cette proposition au moyen des théorèmes obtenus ci-dessus est immédiate. Considérons une fonction holomorphe autour du point à l'infini, soit $f(z)$. Introduisons avec P. Montel et G. Julia la suite de fonctions

(12) $$f(z; n) = f(z\sigma^n) \qquad (\Sigma = |\sigma| > 1),$$

ces fonctions sont holomorphes dans la couronne Γ

$$1 < |z| < \Sigma' \qquad (\Sigma' > \Sigma),$$

tout au moins à partir d'une valeur de n, et les valeurs qu'elles prennent dans la couronne

(13) $$1 < |z| \leq \Sigma$$

sont les valeurs prises par $f(z)$ à l'extérieur d'un cercle de centre origine. D'après les théorèmes de Cauchy et Liouville, chaque circonférence $|z| = r$ contient un point z en lequel $f(z)$ croît indéfiniment avec r, le théorème XXII s'applique donc aux $f(z; n)$: si la suite $f(z; n)$ était normale dans Γ, $f(z; n)$ convergerait vers l'infini. Ceci est impossible d'après le théorème de Weierstrass. La suite $f(z; n)$ n'est pas normale dans Γ, les fonctions $f(z; n)$ prennent dans leur ensemble toute valeur dans Γ sauf une au plus (puisque

l'infini n'est pas pris). Le théorème général de Picard s'ensuit puisque si $g(z)$ est méromorphe autour du point à l'infini et ne prend plus la valeur a pour $|z| > R$, $\frac{1}{g(z) - a}$ est holomorphe pour les valeurs finies de module supérieur à R.

La démonstration précédente est celle de G. Julia. L'important complément apporté par cet éminent géomètre en découle de suite (dans le cas des fonctions holomorphes autour du point essentiel) : il existe dans Γ un point de Julia au moins, donc :

XXX. *Si la fonction $f(z)$ est holomorphe autour du point à l'infini, à tout σ donné de module supérieur à* 1, *correspond une suite au moins de points $z_n = z_0\sigma^n$ tels que $f(z)$ prenne une infinité de fois toute valeur sauf une au plus dans l'ensemble des cercles C_n ayant pour centres les z_n et pour rayon $d|z_n|$, d étant arbitrairement petit.*

Pour les fonctions méromorphes une proposition de cette espèce ne peut plus être vraie en général; c'est ce que montre l'exemple des fonctions invariantes par la transformation $(z, z\sigma)$. G. Julia montra que son théorème est vrai pour toutes les fonctions méromorphes admettant une valeur asymptotique, c'est-à-dire pour lesquelles $f(z)$ tend vers une limite lorsque z s'éloigne indéfiniment sur un certain chemin; car $f(z; n)$ tendant alors vers une valeur a sur un chemin L_n traversant Γ, tendrait uniformément vers a dans tout Γ (théorème VII). Des conditions plus larges furent données par G. Julia (*voir* aussi [32, *b*]). Mais il appartenait à A. Ostrowski de déterminer toutes les fonctions méromorphes faisant exception au théorème de Julia.

XXXI. *Le théorème* XXX *est vrai pour toute fonction méromorphe autour du point à l'infini qui n'appartient pas à une certaine classe de fonctions d'ordre nul mais il peut y avoir deux valeurs exceptionnelles. Il est toujours vrai lorsque*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r, f)}{(\log r)^2} = \infty \quad (^1).$$

L'ensemble $J(\sigma)$ des points où la famille (12) n'est pas normale a été étudié par G. Julia. $J(\sigma)$ est invariant par la substitution $(z, z\sigma)$,

(1) *Voir* aussi une note de W. Saxer [28] et des travaux plus récents de cet auteur.

il est fermé puisque son complémentaire est formé de domaines. $J(\sigma)$ peut ne posséder qu'un point dans la couronne (13), c'est le cas pour

$$f(z) = \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\sigma^n}\right).$$

Un point z_0 de $J(\sigma)$ ne peut être isolé si les $f(z; n)$ ne prennent pas deux valeurs fixes a, b dans un cercle de centre z_0. C'est une conséquence d'une proposition qui sera donnée plus loin (th. XXXV). En particulier $J(\sigma)$ est un ensemble parfait lorsque $f(z)$ ne prend pas deux valeurs a, b autour du point à l'infini $\left[\text{dans ce cas } \frac{1}{f(z) - a} \text{ est holomorphe et } J(\sigma) \text{ existe certainement}\right]$. Si $f(z)$ admet deux valeurs asymptotiques, toute courbe tournant autour de O renferme un point de $J(\sigma)$, $J(\sigma)$ renferme un ensemble continu joignant l'origine au point à l'infini; c'est le cas lorsqu'il y a deux valeurs exceptionnelles.

G. Julia obtient des résultats analogues en considérant les familles

$$f(z\sigma_n), \qquad 1 < B \leq \left|\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}\right| \leq A < \infty,$$

et les familles continues

$$f[z\sigma(t)],$$

$\sigma(t)$ étant une fonction continue du paramètre réel t, dont le module tend vers l'infini lorsque t croît indéfiniment.

L'ensemble de Julia existe d'ailleurs pour toutes ces familles dès qu'il existe pour l'une d'elles [Ostrowski (**b**), Valiron (**b**)].

Dans le cas des fonctions méromorphes d'ordre positif [c'est-à-dire lorsque $\log T(r, f) : \log r$ ne tend pas vers zéro] le théorème XXXI se rattache aux théorèmes généraux obtenus par R. Nevanlinna concernant la distribution circulaire des points où $f(z) = x$ [32, i]. Des procédés directs ont permis à H. Milloux (**a**, **b**, **c**) dans le cas des fonctions à valeur asymptotique, puis à G. Valiron (**k**) dans le cas des fonctions d'ordre positif, de donner des propositions quantitatives entraînant l'existence de l'ensemble $J(\sigma)$ [1]. Le théorème XXIX permet d'ailleurs d'affirmer que, dès que $J(\sigma)$ existe, *on peut trouver une suite de cercles Γ_n dont le centre z_n s'éloigne indéfini-*

---

[1] *Voir* à ce sujet des travaux récents de Milloux, Saxer, Valiron et Biernacki.

ment, qui sont vus de l'origine sous un angle qui tend vers zéro et tels que, dans Γ_n *la fonction méromorphe* $f(z)$ *prend toute valeur sauf celles correspondant à deux cercles de la sphère dont le rayon* ε_n *tend vers zéro lorsque n décroît indéfiniment.*

12. Application à l'étude des fonctions méromorphes dans un angle où elles ne prennent pas trois valeurs exceptionnelles. — P. Montel a appliqué la méthode des familles normales à l'étude d'une fonction $f(z)$, méromorphe dans un domaine angulaire S

$$0 < r = |z| < R, \qquad -\alpha < \varphi = \arg z < +\alpha,$$

ne prenant pas trois valeurs a, b, c dans cet angle, et a retrouvé et complété des résultats antérieurs de E. Lindelof. Il introduit la famille $f(z2^{-n})$ et applique les théorèmes généraux. Il obtient notamment ce théorème (**b**, **c**, **d**) :

XXXII. 1° *Soit* Γ *un chemin aboutissant à* O *en restant complètement intérieur à* S *(sur ce chemin* $|\varphi| \leqq \alpha' < \alpha$*). Si* $f(z)$ *tend vers une limite lorsque z tend vers zéro sur* Γ, $f(z)$ *tend uniformément vers cette limite lorsque z tend vers zéro avec* $|\varphi| \leqq \alpha'' < \alpha$. *Si* $|f(z), a|$ *reste supérieur à* $k > 0$ *sur* Γ, *cette expression reste supérieure à* $k' > 0$ *pour* $|\varphi| \leqq \alpha'' < \alpha$.

2° *Le domaine d'indétermination de* $f(z)$ *lorsque z tend vers zéro sur deux chemins tangents en* O *à un même rayon intérieur à* S *est le même; le domaine d'indétermination pour* $z = 0$ *le long de* $\varphi =$ const. *varie continûment.*

On peut compléter ces résultats lorsque $f(z)$ est holomorphe et bornée dans S. On trouvera dans ce cas dans le mémoire (**b**) de E. Lindelöf de remarquables démonstrations ne faisant appel qu'au principe de Cauchy sur le maximum du module. En dehors des applications de ces propositions qui ont été faites dans la théorie des fonctions méromorphes ou dans celle de la représentation conforme, signalons ici celles faites par P. Fatou (**b**) dans l'étude des valeurs limites d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle $|z| < 1$ lorsque z s'approche d'un point de la circonférence, étude dont le point de départ est le théorème bien connu de Fatou (**a**).

Lorsque le point z tend vers la circonférence sur les rayons

$\varphi = \arg z =$ const., $f(z)$ *tend vers une limite sauf au plus pour les* φ *appartenant à un ensemble de mesure nulle.*

13. Application à l'étude de la convergence uniforme des suites convergentes. — La théorie des familles normales a conduit Montel à un important théorème sur les suites convergentes, qu'il a établi d'abord dans le cas des suites de fonctions holomorphes, puis des suites de fonctions méromorphes ([1]).

Considérons une suite de fonctions méromorphes $f(z; n)$ convergente en chaque point d'un domaine D. *Tout domaine* D' *complètement intérieur à* D *contient un autre domaine* D'' *dans lequel on a*

$$(14) \qquad |f(z; n'). f(z; n)| \leqq \frac{\pi}{2},$$

dès que n *et* n' *sont au moins égaux à un nombre* n_0. Si la proposition n'est pas vraie pour D', il existe deux nombres n'_1 et $n_1 > n'_1$ et un point de D' en lequel

$$|f(z; n_1). f(z; n'_1)| > \frac{\pi}{2}.$$

Cette inégalité reste valable dans un domaine D_1 complètement intérieur à D' en vertu de la continuité sphérique des $f(z; n)$. Si (14) n'est pas vérifiée dans D_1 à partir d'une valeur de n supérieure à n_1 on peut recommencer le même raisonnement, et ainsi de suite. Au bout d'un nombre fini d'opérations on arrive au domaine cherché D'' sans quoi on aurait une suite infinie de domaines D_1, D_2, ..., D_p, ... s'emboîtant les uns dans les autres et contenant un point commun intérieur z_0 en lequel on aurait

$$|f(z_0; n_p). f(z_0, n'_p)| > \frac{\pi}{2}$$

pour une suite indéfiniment croissante de couples de nombres n'_p, n_p, ce qui est en contradiction avec le fait que les $f(z_0; n)$ convergent. L'inégalité (14) est donc valable dans D''. *Une telle inégalité entraîne que la suite est normale dans* D'', car $f(z; n_0)$ est continue sur la sphère, de sorte que le théorème X s'applique. La proposition VI donne alors le théorème de Montel :

([1]) Cette démonstration m'a été communiquée par M. Montel (*voir* [17, k]).

XXXIII. *Si une suite de fonctions méromorphes dans un domaine* D *converge (au sens large) en chaque point du domaine, il existe des domaines de convergence uniforme qui sont partout denses dans* D.

L'ensemble des points de D n'appartenant pas aux domaines de convergence uniforme est l'ensemble J. Il est fermé et ne contient aucun domaine. Dans le cas des fonctions holomorphes et de la convergence au sens strict, J ne contient aucun point isolé d'après le théorème de Weierstrass, c'est un ensemble parfait; en outre, d'après le théorème de Weierstrass cet ensemble est continu et d'un seul tenant avec la frontière [Montel (a)].

Dans tous les cas, si l'on désigne par $E(a)$ l'ensemble des points limites des racines des équations

$$f(z; n) = a$$

lorsque n varie, tout point z_0 de D appartenant à un domaine de convergence uniforme appartient à un $E(a)$ et à un seul, celui pour lequel a est égal à la valeur de la fonction limite en z_0. Tout point appartenant à deux ensembles $E(a)$, $E(b)$ fait donc partie de l'ensemble J. D'ailleurs tout point de J appartient à tous les $E(a)$ sauf à deux au plus. *L'ensemble* J *est donc l'ensemble des points communs à deux au moins de quatre ensembles* $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$, $E(d)$.

IV. — Les familles quasi-normales.

14. **Définition des familles quasi-normales. Suites irrégulières et points irréguliers. Familles d'ordre fini.** — Nous dirons avec P. Montel (e, f) qu'*une famille de fonctions* $f(z)$ *méromorphes dans un domaine* D *est quasi-normale dans ce domaine lorsque de toute suite de fonctions de la famille on peut extraire une autre suite qui converge uniformément dans un domaine obtenu en supprimant de* D *des points n'ayant pas de points d'accumulation à l'intérieur de* D (lorsque D comprend le point à l'infini, on considère D sur la sphère de Riemann). Il existe donc deux sortes de suites convergentes : des suites convergeant partout à l'intérieur de D, ce sont les *suites régulières;* des suites convergeant dans D privé de certains points, ce sont des *suites irrégulières*, les points supprimés sont les *points irréguliers de la suite considérée*. Le

nombre des points irréguliers de chaque suite irrégulière étant fini dans tout domaine complètement intérieur à D, le théorème de Borel-Lebesgue et la méthode des extractions successives et du passage à la suite diagonale montrent encore que :

XXXIV. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille soit quasi-normale dans un domaine est qu'elle le soit autour de chaque point* z_0 *du domaine, c'est-à-dire dans un cercle de centre* z_0.

Les transformations envisagées au n° 4 qui conservent les suites convergentes conservent les familles quasi-normales.

Soit z_0 un point irrégulier d'une suite irrégulière $f(z; n)$. S'il existe un nombre a pour lequel la solution de

$$f(z; n) = a$$

la plus proche de z_0 ne tend pas vers z_0 lorsque n croît indéfiniment, il existe une suite extraite pour laquelle

$$\frac{1}{f(z; n) - a} \qquad [\text{ou } f(z; n) \text{ si } a = \infty]$$

est holomorphe pour $|z - z_0| < \alpha$ et converge uniformément à l'intérieur de ce cercle privé de son centre. Si la convergence a lieu au sens strict, il y a convergence uniforme dans tout le cercle en vertu du théorème de Weierstrass. Donc, ou bien on peut extraire de la suite considérée une autre suite régulière en z_0, ou bien la fonction limite de la suite extraite, donc aussi de la suite considérée, est a. Dans ce dernier cas, si l'hypothèse faite pour a se présente pour une autre valeur b on peut recommencer le même raisonnement, z_0 sera régulier pour une suite extraite puisque b ne peut être valeur limite. En appliquant le procédé des extractions successives et du passage à la suite diagonale (lorsqu'il y a une infinité de points irréguliers), on voit que :

XXXV. *De toute suite* $f(z; n)$ *de fonctions d'une famille quasi-normale on peut extraire une suite régulière ou une suite irrégulière irréductible* $f(z; n')$. *Chaque point irrégulier* z_0 *de* $f(z; n')$ *est irréductible : il est point limite des solutions de toute suite d'équations extraite de la suite* $f(z; n') = x$, *quel que soit* x, *sauf*

peut-être pour une valeur a de x indépendante de z_0. Si la valeur exceptionnelle a existe, a est la fonction limite de la suite irrégulière.

En particulier, *dans le cas des familles quasi-normales de fonctions holomorphes*, l'infini est valeur exceptionnelle, *toutes les suites irrégulières tendent vers l'infini.*

Dorénavant nous ne considérerons que les suites irréductibles. Il est d'ailleurs clair qu'une suite irrégulière donnée *a priori* peut engendrer plusieurs suites irréductibles qui ont même fonction limite mais peuvent avoir des points irréguliers différents. Une suite irrégulière irréductible est une suite exceptionnelle d'Ostrowski (n° 10) autour de chacun de ses points irréguliers.

Une famille quasi-normale dans un domaine D est dite *d'ordre fini au sens strict* dans D lorsque le nombre des points irréguliers de ses suites irréductibles est borné par un nombre fixe. *L'ordre p* est le nombre maximum des points irréguliers de diverses suites irréductibles [Montel (e, f)]. Une famille quasi-normale dans D sera dite *d'ordre fini à l'intérieur de* D lorsqu'elle est d'ordre fini au sens strict dans tout domaine D′ complètement intérieur à D. Toute suite irrégulière irréductible possède $n(D')$ points irréguliers au plus dans tout D′ complètement intérieur à D, $n(D')$ ne dépendant que de D′ et de la famille.

15. **Familles à fonctions limites méromorphes. Familles d'ordre total fini.** — La fonction limite d'une suite irrégulière en z_0 peut admettre z_0 pour point essentiel isolé. Par exemple, $F(u)$ étant holomorphe en tout point à distance finie, $F\left(\frac{1}{z}\right)$ est fonction limite d'une suite de polynomes en $\frac{1}{z}$ qui convergent uniformément pour $|z| < R$, $|z| > 0$. P. Montel (f) a donné une condition suffisante pour qu'un point irrégulier z_0 soit point de méromorphie de la fonction limite.

XXXVI. *La fonction limite $F(z)$ est méromorphe en un point irrégulier de la suite $f(z; n)$ lorsqu'il existe un nombre x et une suite de n pour lesquels le nombre des solutions de l'équation*

$$f(z;n) = x \tag{15}$$

qui tendent vers z_0, lorsque n croît indéfiniment, reste inférieur ou égal à un nombre fixe μ.

Une famille quasi-normale dans D *dont les fonctions prennent* $n(D')$ *fois au plus une valeur* $a(D')$ *dans tout domaine* D' *a toutes ses fonctions limites méromorphes.*

On peut en effet supposer x infini et se borner à considérer une suite pour laquelle $f(z; n)$ a exactement μ pôles tendant vers z_0. On a

$$f(z; n) = \frac{g(z; n)}{(z - z_1^n)(z - z_2^n)\ldots(z - z_\mu^n)},$$

$g(z; n)$ étant holomorphe pour $|z - z_0| < a$ et les z_i^n tendant vers z_0. Si $F(z)$ n'est pas la constante infinie, $g(z; n)$ converge uniformément au sens strict sur une circonférence $|z - z_0| = b$, donc à l'intérieur, vers une fonction $G(z)$ qui est holomorphe en z_0. Par suite

$$F(z) = \frac{G(z)}{(z - z_0)^\mu}.$$

Supposons que $F(z)$ *soit méromorphe en* z_0 *et que ce ne soit pas une constante.* Il est loisible de supposer $F(z_0) = \infty$. Si b est fini, on peut trouver un cercle $|z - z_0| < \alpha$ dans lequel $|F(z) - b| > \beta > 0$ et à l'intérieur duquel les $f(z; n)$ convergent uniformément au sens strict sauf au centre. On peut alors appliquer l'intégrale de Cauchy à

$$\frac{f'(z; n)}{f(z; n) - b},$$

ce qui montre que, *pour chaque n, la différence entre le nombre de solutions de* (15) *qui tendent vers z_0 pour $x = F(z_0)$ et pour $x \neq F(z_0)$ est indépendante de n et égale au degré de multiplicité de la racine z_0 de l'équation* $F(z) = F(z_0)$.

S*i* $F(z)$ *est constant et égal à a*, on voit de suite que dans un voisinage arbitrairement petit donné de z_0 et pour n assez grand, les équations (15) ont, pour un même n, le même nombre de solutions pourvu que $|x, a|$ soit supérieur à un nombre fixe. Mais il n'y a plus de relation simple indépendante de n entre le nombre de racines pour $x = a$ et $x \neq a$.

Ces considérations conduisent à la notion d'ordre d'un point irré-

gulier. Un point z_0 irrégulier pour une suite $f(z;n)$ est dit *d'ordre fini* lorsqu'il existe deux nombres a, b tels que le nombre des racines de (15) tendant vers z_0 lorsque n croît indéfiniment soit au plus $\nu(a)$ pour $x=a$ et $\nu(b)$ pour $x=b$ [Montel (f)]. D'après ce qui précède, on peut extraire de la suite une nouvelle suite pour laquelle le nombre des racines de (15) tendant vers z_0 est indépendant de n et égal à un même nombre μ pour tous les x sauf un au plus.

Cette nouvelle suite est *complètement réduite en z_0*, elle est dite *d'ordre μ en z_0. μ est au plus égal au plus petit des nombres $\nu(a)$, $\nu(b)$ lorsque la fonction limite $F(z)$ n'est pas une constante, il ne dépasse pas à la fois ces deux nombres lorsque $F(z)\equiv c$ et est égal au nombre de racines de $f(z;n)-d$, $d\neq c$, tendant vers z_0.* Lorsque les points irréguliers d'une suite sont tous d'ordre fini, on peut, par des extractions successives et le passage à la suite diagonale, obtenir une suite complètement réduite en chacun de ses points irréguliers, c'est une *suite complètement irréductible. L'ordre total d'une telle suite dans* D' appartenant à D est la somme des ordres de ses points irréguliers dans D'.

Une famille quasi-normale d'ordre fini au sens strict est *d'ordre total fini au sens strict dans* D lorsque tous les points irréguliers sont d'ordre fini et que l'ordre total dans D de toutes les suites complètement réduites est inférieur à un nombre fixe. *L'ordre total est le maximum des ordres de ces suites.*

Une famille quasi-normale d'ordre fini à l'intérieur d'un domaine D est *d'ordre total fini à l'intérieur de* D (ou au sens large) lorsqu'elle est d'ordre total fini au sens strict dans tout domaine D' complètement intérieur à D.

XXXVII. *Une famille quasi-normale dans un domaine* D *dont les fonctions ne prennent que p fois au plus une valeur a et que q fois au plus une valeur b ($q\leq p$) est d'ordre total fini strict au plus égal à p.*

D'après XXXV, la famille est d'ordre fini au sens strict au plus égal à p. Si une suite irrégulière a une fonction limite constante, elle engendre des suites complètement réduites dont l'ordre total est égal au nombre des points où sont prises les valeurs b ou a suivant que a est ou n'est pas la valeur limite. Si une suite irrégulière a une fonc-

tion limite non constante, ses suites complètement réduites sont d'ordre total au plus égal à q.

On a une proposition correspondante pour les familles d'ordre total fini à l'intérieur d'un domaine. On peut aussi supposer dans l'énoncé XXXVII que les deux valeurs a, b sont remplacées par des nombres $a(f)$, $b(f)$ variables avec la fonction, mais dont la distance sphérique reste supérieure à un nombre fixe. Car, de toute suite de fonctions, on pourra en extraire une autre $f(z;n)$ pour laquelle ces nombres $a(f)$, $b(f)$ auront des limites a, b telles que $|a, b|$ ne soit pas nul. a par exemple sera fini, les suites $f(z;n)-a(f)$ et $f(z;n)-a$ auront les mêmes fonctions limites, les fonctions limites de $f(z;n)$ sont donc encore méromorphes aux points irréguliers, et l'on peut raisonner comme ci-dessus.

Comme corollaire du théorème XXXVII ainsi généralisé, on obtient cette proposition qui, dans le cas des valeurs fixes, découle de suite de XXXV : *Une famille quasi-normale de fonctions méromorphes $f(z)$, dont chaque fonction ne prend pas deux valeurs $a(f)$, $b(f)$ de distance sphérique supérieure à un nombre fixe, est une famille normale.*

16. **Les fonctions qui ne prennent qu'un nombre limité de fois trois valeurs.** — Les propositions relatives aux fonctions qui ne prennent pas trois valeurs s'étendent de suite aux fonctions ne prenant qu'un nombre fini de fois trois valeurs.

XXXVIII. *Les fonctions méromorphes dans un domaine* D *et telles que chaque fonction $f(z)$ ne prenne que p, q, r fois au plus trois valeurs $a(f)$, $b(f)$, $c(f)$ dont les distances sphériques deux à deux restent supérieures à un nombre fixe, forment une famille quasi-normale d'ordre total fini au sens strict dans* D. *Si $p \geqq q \geqq r$, l'ordre total est au plus égal à q* [Montel (f)] (1).

Il suffit de remarquer que toute suite de fonctions $f(z)$ est génératrice d'une suite telle que les points en lesquels $f(z)=a(f)$ admettent $p' \leqq p$ points limites intérieurs à D, les points en lesquels $f(z)=b(f)$ admettent $q' \leqq q$ points limites intérieurs à D, les points

(1) Dans ce mémoire, P. Montel dit seulement que l'ordre total est moindre que $q+r$.

en lesquels $f(z) = c(f)$ admettent $r' \leq r$ points limites intérieurs à D. Dans le domaine obtenu en supprimant de D ces points limites, la suite considérée est normale en vertu du théorème XXV généralisé et de III. La famille est donc quasi-normale et l'ordre total limité d'après ce qui précède.

En particulier, les fonctions méromorphes multivalentes d'ordre p dans un domaine forment une famille quasi-normale d'ordre total p au plus. Les fractions rationnelles quotient de deux polynomes de degrés bornés offrent un exemple de ce cas.

D'une façon plus générale, on peut supposer seulement que l'équation $f(z) = a(f)$ possède moins de $p(\mathrm{D}')$ solutions dans tout D' complètement intérieur à D, les hypothèses relatives aux deux autres équations n'étant pas modifiées. Il s'ensuit aussi que :

XXXIX. *Les fonctions méromorphes dans un domaine* D *et telles que, toute fonction* $f(z)$ *de la famille ne prend que* $n(\mathrm{D}')$ *fois au plus trois valeurs* $a(f)$, $b(f)$, $c(f)$ *dans tout domaine* D' *complètement intérieur à* D *forment une famille quasi-normale d'ordre total fini au sens large dans* D *pourvu que les distances sphériques deux à deux de* $a(f)$, $b(f)$ *et* $c(f)$ *restent supérieures à* $d(\mathrm{D}') > 0$.

Les fonctions méromorphes pour $|z| < 1$ et pour lesquelles la fonction $\mathrm{T}(r)$ de Nevanlinna est inférieure à une fonction donnée $\varphi(r)$ rentrent dans ce cas.

Le théorème XVIII s'applique sous la forme suivante aux familles quasi-normales d'ordre total fini au sens large :

XL. *Si la famille des fonctions méromorphes* $f(z)$ *est quasi-normale d'ordre total fini à l'intérieur de* D *et si la constante* a *n'est valeur limite d'aucune suite régulière ou irrégulière de la famille, le nombre des solutions de* $f(z) = a$ *est borné dans tout* D' *complètement intérieur à* D *par un nombre* $n(\mathrm{D}', a)$.

La démonstration reste la même que plus haut. L'hypothèse de l'ordre total fini limite en effet le nombre de solutions de $f(z) = a$ voisines d'un point irrégulier puisque a n'est pas la valeur limite.

Le théorème XIX et sa conséquence XXI sont valables sans modifications pour ces familles. On en déduit cette proposition qui montre quel est le contenu des familles d'ordre total fini :

XLI. *Pour qu'une famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans D soit quasi-normale d'ordre total fini à l'intérieur de D, il faut et il suffit qu'il existe quatre nombres fixes a, b, c, d tels que, à tout domaine D' complètement intérieur à D corresponde un nombre $n(D')$ limitant, pour toute fonction $f(z)$, le nombre des solutions de trois au moins des quatre équations*

$$f(z)=a, \quad f(z)=b, \quad f(z)=c, \quad f(z)=d.$$

La famille définie par cette dernière condition sera en général plus étendue qu'une famille donnée *a priori* jouissant de la même propriété. Remarquons ici que les familles quasi-normales d'ordre fini au sens large et à fonctions limites méromorphes jouissent de cette propriété : la famille prolongée obtenue en adjoignant aux fonctions données leurs fonctions limites est une famille quasi-normale fermée, c'est-à-dire dont toutes les fonctions limites appartiennent à la famille.

En s'appuyant sur le théorème XXVI au lieu de XXV, on montre de même que :

XLII. *Les fonctions $f(z)$ méromorphes dans un domaine D et telles que, pour $j=1, 2, \ldots, k$, l'équation $f(z)=a_j$ n'ait que p_j racines d'ordre de multiplicité moindre que m_j, forment une famille quasi-normale d'ordre fini au plus égal à la somme des p_j pourvu que*

$$\sum\left(1-\frac{1}{m_j}\right)>2.$$

Il y aurait lieu de chercher si l'on peut obtenir de cette façon des exemples généraux effectifs de familles dont toutes les fonctions limites ne sont pas méromorphes, ou même qui ne sont pas d'ordre total fini au sens large.

17. Familles quasi-normales n'admettant pas la fonction limite infinie. Applications. — Le théorème XXIV s'étend aux familles quasi-normales quelconques n'admettant pas la constante infinie comme fonction limite de ses suites convergentes :

XLIII. *La famille $f(z)$ quasi-normale dans D n'admettant pas l'infini comme fonction limite, à tout domaine borné D' complètement intérieur à D et à tout ε positif correspond un nombre $M(D', \varepsilon)$*

qui borne le module de $f(z)$ en tout point de D' extérieur aux cercles de rayon ε ayant pour centres les pôles de cette fonction [Montel (f)].

Tout point irrégulier d'une suite irrégulière irréductible est en effet point limite des pôles des fonctions de toute suite qui en est extraite (XXXV), de sorte que la démonstration du n° 8 s'applique encore.

Il est aisé de donner des conditions dans lesquelles l'infini n'est pas fonction limite. Pour une famille quelconque il suffit de supposer les fonctions uniformément bornées en une infinité de points ayant un point limite à l'intérieur du domaine considéré. Lorsque l'ordre est fini au sens strict et égal à p, il suffit de borner les fonctions en $p+1$ points fixes. P. Montel a également donné [17, f], pour certaines familles, une proposition qui se complète comme suit :

XLIV. *Si une famille quasi-normale est d'ordre total fini au sens strict égal à p [ou si la famille étant quasi-normale, les $f(z)$ ne prennent que p fois au plus en tout la valeur zéro dans le voisinage des points irréguliers de chaque suite irrégulière] et si*

$$f(z_j),\quad f'(z_j),\quad \ldots,\quad f^{(\alpha_j-1)}(z_j)$$

ont leur module inférieur à un nombre fixe M en des points z_j $(j=1, 2, \ldots, k)$ tous à distance finie, avec

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=p+1,$$

l'infini n'est pas fonction limite.

Soit $P(z, f)$ le polynome de degré p qui prend ainsi que ses dérivées, en chaque point z_j, les mêmes valeurs que $f(z)$ et ses (α_j-1) premières dérivées. Les $P(z, f)$ sont uniformément bornés dans un domaine D' borné et intérieur à D contenant les z_j. Des suites $f(z)$ et $g(z)=f(z)-P(z, f)$ formées avec des fonctions correspondantes convergent en même temps dans D', notamment vers l'infini. Si la suite $g(z;n)$ est irrégulière irréductible et converge vers l'infini, chaque z_j est irrégulier, $\alpha'_j \geqq \alpha_j$ zéros de $g(z;n)$ tendent vers ce point, et il en est de même pour la suite $f(z;n)$ d'après le théorème de Rouché convenablement modifié. Les $f(z;n)$ ont en tout $p+1$ zéros

voisins des points irréguliers, ce qui est en contradiction avec la première partie de l'hypothèse.

Le théorème XLIV, et par suite XLIII, s'appliquent aux familles dont les fonctions ne prennent que p fois au plus une valeur *finie* a; donc aux fonctions ne prenant qu'un nombre fini de fois trois valeurs. On peut encore ici supposer ces valeurs exceptionnelles mobiles. Les familles envisagées dans le théorème XLII satisfont également à la première condition de XLIV (sous la seconde forme).

On vérifie sans peine que les propriétés énoncées dans XL (dans le cas $a = \infty$) et XLIII caractérisent les familles quasi-normales d'ordre total fini n'admettant pas la constante infinie comme fonction limite.

Les familles quasi-normales de fonctions holomorphes n'admettant pas l'infini comme fonction limite sont en réalité normales et bornées, le théorème de Vitali s'applique aux fonctions de telles familles. On obtient de nouveaux critères de familles normales. Par exemple :

XLV. *Si les fonctions*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_p z^p + \ldots, \tag{16}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_p$ *sont donnés, appartiennent à une famille quasi-normale* $\mathfrak{F}$ *holomorphe d'ordre total fini au plus égal à* p *dans le cercle* $|z| < 1$, *on a, pour* $|z| = r < 1$,

$$|f(z)| < M(a_0, a_1, \ldots, a_p, r, \mathfrak{F}).$$

Cette proposition, qui généralise le théorème de Schottky, s'applique en particulier aux fonctions multivalentes d'ordre p.

P. Fatou (e) et P. Montel (e) ont déduit de telles inégalités des théorèmes de Kœbe sur les fonctions univalentes. Si la fonction (16) est univalente et holomorphe pour $|z| < 1$, la fonction

$$g(z) = \frac{f(z) - a_0}{a_1}$$

est aussi univalente, donc bornée à l'intérieur du cercle par une fonction de $|z|$, donc aussi $g'(z)$. Comme $g'(z)$ ne s'annule pas, $\frac{1}{g'(z)}$ appartient aussi à une famille normale. Donc

$$\frac{1}{K_1(r)} < |g'(z)| < K_1(r).$$

Ainsi le théorème de Kœbe sur la déformation dans la représentation conforme est rattaché très simplement à la théorie de P. Montel :

Si $f(z)$ est holomorphe et univalente pour $|z| < 1$, on a, z et z' étant intérieurs au cercle de centre $z = 0$ et rayon r,

$$\frac{1}{K(r)} < \left|\frac{f'(z)}{f'(z')}\right| < K(r).$$

Dans le même mémoire [17, e], P. Montel démontrait aussi un autre théorème de Kœbe, qui a été depuis généralisé par E. Landau (e), H. Bohr [5], G. Valiron [32, f, h]. P. Montel est revenu récemment sur cette proposition (i, j) et lui a donné une forme générale qui peut s'énoncer ainsi :

XLVI. *Étant donnés : une famille $\mathfrak{F}$ de fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine D telle qu'aucune suite de fonctions de la famille ne converge uniformément à l'intérieur de D vers une constante (finie ou infinie); un nombre positif ε et un point z_0 de D; il existe un nombre $C(\mathfrak{F}, \varepsilon, z_0)$ jouissant de cette propriété : quelle que soit la fonction $f(z)$ de $\mathfrak{F}$, les valeurs $Z = f(z) - f(z_0)$ couvrent tout le cercle $|Z| < C(\mathfrak{F}, \varepsilon, z_0)$ sauf au plus un petit cercle qui est vu de $Z = 0$ sous l'angle ε.*

Car, dans le cas contraire, il existerait une suite de fonctions $f(z; n)$ de la famille telle que $f(z; n) - f(z_0; n)$ ne prenne pas deux valeurs $Z(n)$, $Z'(n)$ avec

$$|Z'(n)| \geqq Z(n), \qquad |Z'(n) - Z(n)| > \varepsilon' |Z(n)|, \qquad \lim Z'(n) = 0,$$

ε' étant en rapport constant avec ε. Les fonctions

$$\frac{f(z;\, n) - f(z_0;\, n) - Z(n)}{Z'(n) - Z(n)}$$

formeraient une suite normale de valeurs moindres que $\frac{1}{\varepsilon'}$ en z_0, donc bornée à l'intérieur de D. On aurait dans tout D_1 complètement intérieur à D

$$|f(z;\, n) - f(z_0;\, n)| < 2|Z'(n)|\, \psi(D_1, \varepsilon'),$$

$f(z; n) - f(z_0; n)$ tendrait uniformément vers zéro à l'intérieur de D; une suite $f(z; n)$ tendrait uniformément vers une constante finie ou infinie.

Les résultats de G. Valiron, généralisant ceux de Landau et Bohr, correspondent au cas où le domaine D est le cercle $|z| < 1$, $z_0 = 0$, et où $f(0) = 0$, avec l'hypothèse supplémentaire $f'(0) = 1$ (Landau) ou $|f(z)| > 1$ en un point $|z| = \rho < 1$ (Bohr).

P. Montel donne également une proposition générale comprenant celles de Fekete [10] relatives au cas de fonctions s'annulant au moins p fois dans un domaine inférieur à D; on peut donner à cette proposition une forme analogue à XLVI (*voir* [17, i, j]). Ces théorèmes s'étendent aux fonctions méromorphes; on introduit alors deux petits cercles exceptionnels. Une proposition d'une nature différente sera donnée plus loin (n° 20).

18. Extensions du théorème de Schottky. — D'une façon générale, le théorème XLIII constitue une extension du théorème de Schottky. Par exemple, les fonctions d'une famille méromorphe quasi-normale d'ordre total fini p dans le cercle $|z| < 1$ et qui sont de la forme (16) autour de l'origine, sont bornées en module par un nombre $M(a_0, a_1, \ldots, a_p, |z|, \varepsilon)$ en tout point du cercle $|z| < 1$ extérieur aux cercles de rayon ε ayant pour centres les pôles de la fonction considérée.

Le théorème de Schottky peut se généraliser dans d'autres directions. Remarquons d'abord qu'on peut lui donner la forme suivante : *si $f(z)$, $g(z)$ et $f(z) - g(z)$ sont holomorphes et ne prennent pas la valeur zéro dans le cercle $|z| < 1$, on a*

$$|f(z)| < |g(z)|\,\chi\left[\left|\frac{f(0)}{g(0)}\right|, |z|\right]$$

[il suffit d'appliquer le théorème de Schottky au quotient $f(z) : g(z)$]. Cette inégalité permet de généraliser les théorèmes de Julia du n° 11 dans le cas des fonctions holomorphes [35].

Considérons d'une façon générale une fonction $f(z)$ holomorphe pour $|z| < 1$, telle que $f(z) - g(z)$ et $f(z) - h(z)$ ne s'annulent pas, $g(z)$ et $h(z)$ étant méromorphes pour $|z| < 1$ et appartenant à une famille normale G. On suppose en outre $f(0)$, $g(0)$ et $h(0)$ finis et $h(0) - g(0) \neq 0$. La fonction

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - g(z)}{h(z) - g(z)}$$

appartient à une famille méromorphe quasi-normale pour $|z| < 1$,

mais holomorphe et bornée pour $|z| < \delta[g(o), h(o), G]$. Il s'ensuit que $\varphi(z)[h(z) - g(z)]$, puis $f(z)$ appartiennent aussi à des familles quasi-normales bornées autour de l'origine. $f(z)$ qui est holomorphe appartient donc à une famille normale bornée, on a, pour $|z| < 1$,

$$|f(z)| < \Omega[|f(o)|, g(o), h(o), G, |z|].$$

Cette inégalité généralise un théorème de P. Montel (h). Ici aussi [*voir* Montel (h)] on pourra généraliser en supposant que $f(z) - g(z)$ et $f(z) - h(z)$ ont un nombre de zéros borné dans $|z| < 1$, on fixera alors la valeur des fonctions et de certaines de leurs dérivées en un nombre convenable de points. On peut aussi remplacer l'hypothèse que les familles g et h sont normales par une limitation de $T(r, g)$ et $T(r, h)$. La proposition obtenue s'énonce ainsi pour les fonctions méromorphes :

XLVII. *Supposons que $g(z)$, $h(z)$ et $k(z)$ soient méromorphes pour $|z| < 1$, avec*

$$[g(o) - h(o)][g(o) - k(o)][h(o) - k(o)] \neq o,$$
$$T(r, g) < \varphi(r), \qquad T(r, h) < \varphi(r), \qquad T(r, k) < \varphi(r),$$

$\varphi(r)$ étant une fonction donnée. Toute fonction $f(z)$ méromorphe pour $|z| < 1$ telle que $f(z) - g(z)$, $f(z) - h(z)$ et $f(z) - k(z)$ ne s'annulent pas dans ce cercle, vérifie l'inégalité

$$T(r, f) < \Omega[\varphi; |f(o)|, g(o), h(o), k(o), r].$$

L'exemple

$$f(z) = \frac{1}{n\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)}, \qquad g(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{2} - \frac{1}{n}},$$
$$h(z) = g(z) - 1, \qquad k(z) = g(z) + \frac{1}{2}$$

montre que, dans le cas où $f(z)$ est méromorphe, la famille $f(z)$ peut ne pas être normale.

19. Extensions du théorème de Landau. — On peut passer du théorème de Schottky au célèbre théorème de Landau en utilisant les inégalités de Cauchy. D'une inégalité bornant $|f(z)|$ pour $|z| < R$,

on déduit en effet que $\frac{1}{2}R|f'(0)|$ est borné, ce qui conduit à une inégalité relative à R. En particulier :

XLVIII. *a_0 et $a_1 \neq 0$ étant donnés, une fonction de la forme* (16) *autour de l'origine pour laquelle les racines de $f(z) = x$ sont d'ordre de multiplicité au moins égal à m_j pour $x = x_j$, ($j = 1, 2, \ldots, k$) avec*

$$\sum\left(1 - \frac{1}{m_j}\right) > 2$$

ne peut être méromorphe dans un cercle

$$|z| < \frac{1}{|a_1|}\Omega(|a_0|, m_1, m_2, \ldots, m_k)$$

[Montel (c); Bloch (d, f)].

XLIX. *a_0 et $a_1 \neq 0$ étant donnés, une fonction de la forme* (16) *cesse d'être holomorphe ou prend au moins une fois la valeur zéro, ou prend q fois au moins la valeur* 1 *dans un cercle*

$$|z| < \frac{1}{|a_1|}\Omega(|a_0|, q)$$

[Landau (b)].

On peut aussi remplacer la donnée de a_1 par celle d'une limite inférieure convenable de $|f(z)|$ en un second point. Par exemple, il existe un cercle $|z| < \chi(M)$ dans lequel les fonctions de module moindre que M à l'origine et de module supérieur à M + 1 au point $z = 1$, ne sont pas holomorphes ou bien ont des zéros d'ordre de multiplicité moindre que 2 ou bien prennent la valeur 1 en des points d'ordre de multiplicité moindre que 3.

Le théorème XLVIII montre qu'il n'existe pas de fonction méromorphe en tout point à distance finie prenant les valeurs x_j dans les conditions de multiplicité indiquées. Ce résultat reste vrai pour les fonctions méromorphes autour du point à l'infini [17, c); (4, d, f)].

On trouvera dans les mémoires de E. Landau diverses extensions de son théorème.

P. Montel (e) et L. Bieberbach [2] [*voir* aussi Landau (f, g)] ont étendu le théorème de Landau au cas des fonctions holomorphes ne prenant qu'un nombre fini de fois deux valeurs. P. Montel (f) a

montré ensuite que le théorème s'applique aussi aux fonctions méromorphes.

L. *Considérons les fonctions $f(z)$ vérifiant les conditions*

$$(17)\quad \begin{cases} f(z_j)=\beta_j, \quad f'(z_j)=\beta'_j, \quad \ldots, \quad f^{(\alpha_j-1)}(z_j)=\beta_j^{(\alpha_j-1)} \\ (j=0,1,\ldots,k;\ \alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k=p+r+2;\ r\leqq p), \end{cases}$$

les z_j, β_j étant tels qu'il n'existe pas dans cette famille de fraction rationnelle quotient d'un polynome de degré p au plus par un polynome de degré r au plus. q étant un entier supérieur ou égal à p; il existe un nombre

$$R = R(p, q, r, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k; \beta'_0, \ldots, \beta_k^{(\alpha_k-1)}),$$

tel que toute fonction de la famille prend $q+1$ fois au moins la valeur 1 *ou $p+1$ fois la valeur zéro ou $r+1$ fois la valeur ∞, ou bien cesse d'être méromorphe dans le cercle $|z|<R$.*

Car supposons que R n'existe pas. Il existerait une suite $f(z;n)$ de fonctions f, $f(z;n)$ étant méromorphe pour $|z|<n$ et ne prenant pas plus de p, q, r fois les valeurs 0, 1, ∞ respectivement dans ce cercle. La suite $f(z;n)$ serait quasi-normale d'ordre total au plus égal à p dans tout cercle $|z|<A$; on en extrairait une suite $f(z;n')$ uniformément convergente dans un tel cercle privé des points irréguliers, et, d'après le théorème XLIV la fonction limite ne serait ni zéro ni ∞. En mettant en évidence dans $f(z;n')$ les pôles dont les points limites sont à distance finie, on a

$$f(z;n')=\frac{g(z;n')}{R(z;n')}.$$

Pour $|z|<A$, $R(z;n')$ tend uniformément vers un polynome $R(z)$ dont les zéros sont les pôles de la fonction limite de f et les points irréguliers, donc $g(z;n')$ qui est holomorphe tend uniformément vers une fonction entière $P(z)$ dont les zéros sont les points irréguliers et les zéros de la fonction limite de $f(z;n')$. $R(z)$ est de degré r au plus, $P(z)$ a p zéros au plus, et, en dehors des points irréguliers $f(z;n')$ converge vers $P(z):R(z)$. Si $P(z)$ n'est pas identique à $R(z)$, les points où $P:R$ prend la valeur 1 sont points limites de points où $f(z;n')=1$, il y en a moins de q; $P:Q$ est une fraction rationnelle d'après le théorème de Picard. Donc, dans tous les cas, $P(z)$

est un polynome de degré p au plus. Pour $z = z_j$, on a

$$g(z_j;\, n') = \beta_j\, R(z_j;\, n'),$$
$$g'(z_j;\, n') = \beta_j\, R'(z_j;\, n') + \beta'_j\, R(z_j;\, n'),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En passant à la limite, on voit que P : R devrait satisfaire aux conditions (17) contrairement aux hypothèses. Le théorème est établi [1].

P. Montel (**h**) a donné récemment de nouvelles extensions du théorème de Landau dans l'ordre d'idées de celles données plus haut pour le théorème de Schottky. Considérons un système de fonctions f, g, h, k méromorphes autour de l'origine et supposons que deux quelconques des quatre fonctions ne soient jamais égales (elles ne prennent pas simultanément la même valeur, finie ou *infinie*). La fonction

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - g(z)}{f(z) - h(z)}\, \frac{k(z) - h(z)}{k(z) - g(z)}$$

est holomorphe et ne prend pas les valeurs 0 et 1, on peut lui appliquer le théorème de Landau : si $\varphi'(0) \neq 0$, il existe un cercle

$$|z| < \frac{1}{|\varphi'(0)|}\, \Omega[|\varphi(0)|],$$

dans lequel, ou bien l'une des quatre fonctions cesse d'être méromorphe, ou bien deux des quatre fonctions sont égales en un point au moins.

P. Montel généralise en supposant que les égalités telles que $f(z) = g(z)$ n'ont lieu qu'en p points au plus. On applique alors le théorème L à $\varphi(z)$.

20. **Nouveaux critères de familles normales.** — A. Bloch a obtenu de nouveaux critères de familles normales en s'appuyant sur la proposition suivante :

LI. *Si la fonction $f(z)$ est holomorphe pour $|z| < 1$, si $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, il existe un cercle de rayon supérieur à une certaine constante absolue dans lequel une branche de la fonction inverse*

---

[1] Cette démonstration m'a été communiquée par M. Montel.

de $f(z)$ est holomorphe. Le centre de ce cercle peut être pris sur l'axe des quantités réelles.

Pour la démonstration du théorème complet je renverrai au fascicule XX du *Mémorial*. G. Valiron (**e**) puis E. Landau ont donné des démonstrations simples de la première partie du théorème. Voici celle de E. Landau (**h**). On peut supposer $f(z)$ holomorphe même pour $|z| = 1$, alors $M(r)$ désignant le maximum de $|f'(re^{iu})|$, $(0 < u \leqq 2\pi)$, $(1-r)M(r)$ égal à 1 pour $r = 0$ et à 0 pour $r = 1$ atteint la valeur 1 pour $r = r_0 < 1$ et est moindre que 1 pour $r > r_0$. Soit z_0 un point tel que

$$|f'(z_0)| = M(r_0), \qquad |z_0| = r_0.$$

En posant

$$z = z_0 + \frac{1-r_0}{2} Z, \qquad f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2} F(Z),$$

la fonction $F(Z)$ holomorphe pour $|Z| < 1$ vérifie les conditions

$$|F'(0)| = 1, \qquad |F'(Z)| < 2,$$

donc, en vertu du lemme de Schwarz

$$|F'(Z) - \omega| \leqq 3|Z|, \qquad |F(Z) - \omega Z| \leqq \frac{3}{2}|Z^2|, \qquad (|\omega| = 1).$$

Alors, d'après le théorème de Rouché, $F(Z)$ prend une fois et une seule pour $|Z| < \frac{1}{3}$ les valeurs de module moindre que $\frac{1}{6}$. E. Landau a montré que la constante B correspondant à la première partie du théorème est comprise entre $\frac{1}{4}e$ et $\frac{1}{8}$.

De LI, A. Bloch (**a**) déduit ce critère de famille normale :

LII. *Si des fonctions holomorphes dans un domaine* D *sont telles que tous les cercles d'holomorphie de leurs fonctions inverses ont un rayon moindre qu'un nombre fixe, elles forment une famille normale. D'une façon précise, leurs dérivées forment une famille bornée à l'intérieur de* D.

Car, $f(z)$ étant une des fonctions, z_0 un point de D, $|z - z_0| < R_0$ un cercle intérieur à D, $BR_0|f'(z_0)|$ est inférieur au nombre fixe donné.

Ce théorème de Bloch permet de donner une autre forme à la proposition XLVI :

LIII. *Si la famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes dans le domaine D ne contient aucune suite convergeant uniformément à l'intérieur de D vers une constante finie ou infinie, il existe un nombre $C(\mathcal{F})$ tel que la fonction inverse d'une fonction quelconque de la famille possède un cercle d'holomorphie de rayon au moins égal à $C(\mathcal{F})$.*

Car, dans le cas contraire, il existerait une suite infinie $f(z; n)$ telle que le plus grand rayon des cercles d'holomorphie de l'inverse de $f(z; n)$ soit $\varepsilon(n)$, $\varepsilon(n)$ tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Les fonctions $f'(z; n):\varepsilon(n)$ seraient bornées dans leur ensemble d'après LII; les $f'(z; n)$ tendraient uniformément vers zéro à l'intérieur de D; de la suite $f(z; n)$ on pourrait extraire une suite convergeant uniformément vers une constante.

A. Bloch a donné récemment des énoncés généralisant le théorème précédent dans diverses directions. Certains de ses résultats découlent de cette généralisation du théorème LI (*voir* fasc. XX, th. XXIII, p. 32) :

Si la fonction

$$Z = f(z) = a_1 z + \ldots + a_p z^p + \ldots \qquad (a_p \neq 0)$$

est holomorphe dans le cercle $|z| < H\mu$, H *étant une constante absolue et* μ *le maximum des nombres*

$$1 + \sqrt[p-q]{\frac{|a_q|}{|a_p|}} \qquad (q < p),$$

il existe une couronne $0 \leqq \tau < |Z| < \tau + |a_p| \mu^p$ *telle que la fonction inverse de* $f(z)$ *admet* $N \geqq p$ *branches holomorphes dans la couronne sectionnée le long d'un rayon arbitraire, ces* N *branches se permutant entre elles lorsque* Z *tourne autour de l'origine.*

A. Bloch déduit de là un critère de famille quasi-normale dont on trouvera l'énoncé dans le fascicule XX (th. XXIV, p. 32). Dans un ordre d'idées un peu différent, A. Bloch obtient par des considérations différentes de celles développées ici, cette proposition qui généralise le théorème XL du fascicule XX :

LIV. *Les fonctions méromorphes dans un domaine et dont le domaine riemannien ne comprend aucun de cinq domaines donnés, simplement connexes, à un seul feuillet, et dont la distance les uns aux autres n'est pas nulle, forment une famille normale.*

Il y aurait lieu de chercher des démonstrations simples de ces propositions.

V. — Les familles normales de systèmes de fonctions.

21. Le théorème de Picard sur l'uniformisation. — On doit à E. Picard les deux importantes propositions suivantes :

LV. *Si deux fonctions méromorphes dans le voisinage d'un point singulier essentiel commun vérifient une relation algébrique, le genre de cette relation est au plus égal à* 1.

LVI. $F(x, y) = 0$ *étant une courbe de genre supérieur à* 1, *si deux fonctions uniformes*

$$x(t) = a_0 + a_1 t + \ldots, \qquad y(t) = b_0 + b_1 t + \ldots \tag{18}$$

satisfont à l'équation de la courbe dans le voisinage du point $t = 0$, *ces fonctions ne peuvent être simultanément méromorphes dans un cercle* $|t| < R$ *dont le rayon est supérieur à un nombre dépendant uniquement de la fonction* F, *de* a_0, b_0 *et de* a_1 *supposé non nul.*

Ces propositions peuvent être établies de diverses façons [Picard (**u**, ..., **e**), Montel (**h**)]. La proposition LVI résulte immédiatement du théorème LI et de cette propriété facile à vérifier : une intégrale abélienne de première espèce

$$\int \frac{Q(x, y)}{F'_y} dx,$$

correspondant à $F(x, y) = 0$ ne contient que des cercles à un feuillet dont le rayon est borné par un nombre $M = M(F, Q)$. Comme cette intégrale est une fonction holomorphe $u(t)$, on voit de suite que les fonctions (18) ne peuvent être toutes deux méromorphes dans le

cercle

(19) $$|t| < \frac{M}{B}\left|\frac{F'_y(a_0, b_0)}{a_1 Q(a_0, b_0)}\right|.$$

Ceci démontre le théorème LVI. En outre, pour tout couple uniformisant méromorphe pour $|t| < R$, les fonctions $u'(t)$ sont bornées dans leur ensemble. En étudiant le rapport $\frac{dx}{du}$ on voit alors que $x(t)$ et $y(t)$ sont également continues :

LVII. *La courbe* $F(x, y) = 0$ *étant de genre supérieur à* 1, *les couples uniformisants méromorphes dans un domaine* γ *forment une famille normale* [Bloch (**a**), Montel (**h**)].

A. Bloch déduit également le théorème LV de (19). Si un couple uniformisant est méromorphe pour $|t| > R$ et t fini, on a

$$\left|\frac{x'(t)\, Q(x, y)}{F'_y(x, y)}\right| < \frac{B}{M(|t| - R)};$$

le premier membre est donc holomorphe à l'infini. Le quotient $Q_1 : Q_2$ de deux adjointes aurait une limite pour $t = \infty$, donc le point x, y aurait une limite, x et y seraient encore méromorphes à l'infini.

P. Montel (**h**) a donné un résultat analogue à LVI dans le cas où le genre de $F(x, y) = 0$ est 0 ou 1. Dans le cas du genre égal à 1, x et y sont fonctions doublement périodiques d'une variable u, le parallélogramme des périodes correspondant biunivoquement à la surface de Riemann relative à $F(x, y) = 0$. S'il existe des fonctions uniformisantes (18), u est fonction holomorphe de t. *Si* $x(t)$ *et* $y(t)$ *ne prennent pas un couple de valeurs* x_0, y_0 $[F(x_0, y_0) = 0]$, $u(t)$ ne prend pas deux valeurs, la famille $u(t)$, donc aussi *les familles* $x(t)$ *et* $y(t)$ *sont normales. Si* a_0, b_0, a_1, x_0, y_0 *sont donnés, le rayon de méromorphie commun des fonctions* (18) *est borné.* Il est clair que LVII s'étend dans les mêmes conditions. P. Montel généralise en supposant que le couple de valeurs x, y est pris k fois au plus. Dans le cas du genre zéro il obtient un résultat analogue en introduisant trois couples de valeurs exceptionnelles.

22. **Les familles complexes de P. Montel.** — P. Montel (**h**) a étudié certains systèmes de fonctions holomorphes dans un domaine D où elles admettent des combinaisons linéaires exceptionnelles, c'est-à-dire des combinaisons qui ne s'annulent pas.

Lorsque D est le plan complet, un théorème de Borel [6] sur les sommes d'exponentielles permet d'affirmer que ν fonctions entières ne peuvent admettre plus de $2\nu - 1$ combinaisons linéaires exceptionnelles différentes. Cette proposition sert à P. Montel à compléter un théorème de G. Rémoundos [26] sur les fonctions algébroïdes.

Pour un domaine D quelconque, les résultats de P. Montel peuvent se déduire de cette proposition qu'on rapprochera de celle donnée au n° 18 : *si les fonctions* $f(z)$ *sont bornées en un point* z_0 *de* D *et si* $f(z)-g(z)$ *et* $f(z)-h(z)$ *ne s'annulent pas dans* D, $g(z)$ *et* $h(z)$ *appartenant à une famille bornée dans* D *telle que la famille* $g(z)-h(z)$ *n'admette pas zéro pour fonction limite, la famille* $f(z)$ *est normale et bornée dans* D. Car la famille $[f(z)-g(z)]:[h(z)-g(z)]$ est normale puisque $h(z)-g(z)$ a moins de $n(D')$ zéros dans tout domaine D' complètement intérieur à D; la famille $f(z)-g(z)$ est donc aussi normale et bornée et par suite aussi la famille $f(z)$.

Considérons alors un système de trois fonctions par exemple, $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ holomorphes dans D et admettant des combinaisons exceptionnelles formant deux tableaux triangulaires

(20) $f_1(z)+a$, $\qquad f_1(z)+a'$,

(21) $f_2(z)+b\,f_1(z)+c$, $\qquad f_2(z)+b'f_1(z)+c'$,

(22) $f_3(z)+d\,f_2(z)+e\,f_1(z)+k$, $\qquad f_3(z)+d'f_2(z)+e'f_1(z)+k'$,

a, a', ... étant donnés. Si l'on suppose en outre que les fonctions sont bornées en un point z_0 de D et que le module de la différence des fonctions d'une même ligne reste supérieur à un nombre fixe en un point z_1, *les fonctions* f_1, f_2, f_3 *appartiennent à une famille normale bornée à l'intérieur de* D. Il est clair qu'il en serait de même si l'on remplaçait les combinaisons linéaires (21) par d'autres combinaisons exceptionnelles

$$f_2(z)+P_1[f_1(z)], \qquad f_2(z)+P_2[f_1(z)],$$

P_1 et P_2 étant des polynomes donnés, $|P_1-P_2|$ restant supérieur à un nombre fixe en un point, et celles de la ligne (22) par d'autres où figureraient des polynomes en f_1 et f_2.

P. Montel (h) montre que l'hypothèse que les $f(z)$ sont bornés en un point est indispensable; par exemple, si $f_1(z)=3^n$, $f_2(z)=(2z)^n$, n entier positif et $|z|<1$, la famille $f_2(z)$ n'est pas normale et f_1

et $f_1 + f_2$ admettent cependant plusieurs combinaisons exceptionnelles. Il donne également un moyen pour reconnaître si ν fonctions admettant deux groupes de ν combinaisons exceptionnelles distinctes peuvent être transformées par substitution linéaire en des fonctions pour lesquelles les combinaisons exceptionnelles forment deux tableaux triangulaires analogues à ceux considérés ci-dessus.

Pour les fonctions méromorphes, P. Montel (**h**) suppose qu'il y a trois fois plus de combinaisons exceptionnelles que de fonctions, ces combinaisons et fonctions satisfaisant à des conditions convenables.

23. **Les résultats de A. Bloch.** — Dans ses recherches sur le même sujet, A. Bloch (**e**) s'est placé à un point de vue tout différent. D'après le théorème de Borel sur les sommes d'exponentielles [6], si deux fonctions entières n'ont pas de zéros, leur somme prend nécessairement la valeur 1. Quelle est la proposition correspondante pour deux fonctions holomorphes dans un domaine? si $f(z)$ et $g(z)$ holomorphes ne s'annulent pas dans D et si $f(z)+g(z)+1$ ne s'annule pas dans D, a-t-on une proposition analogue au théorème de Landau? au théorème de Schottky? Voici la réponse fournie par A. Bloch (**e**) :

LVIII. *Si $f(z)$ et $g(z)$ sont holomorphes pour $|z|<1$, $a_0=f(0)$, $b_0=g(0)$, si $f(z)$, $g(z)$ et $f(z)+g(z)+1$ ne s'annulent pas dans ce cercle :*

1° *Si*

$$(a_0-1)(b_0-1)(a_0-b_0)\neq 0,$$

$|f(z)|$, $|g(z)|$ et $|f(z)+g(z)+1|$ sont bornés inférieurement et supérieurement pour $|z|<r$ par des nombres ne dépendant que de a_0, b_0 et r;

2° *Si l'un seulement des nombres a_0-1, b_0-1, a_0+b_0 est nul, par exemple $a_0+b_0=0$, $\left|\frac{f}{g}\right|$ et $|f+g+1|$ sont bornés inférieurement et supérieurement par des nombres ne dépendant que de a_0, b_0 et r;*

3° *Si $a_0=1$ et $b_0=1$, $\left|\frac{f+g+1}{fg}\right|$ est borné inférieurement et supérieurement par des nombres ne dépendant que de a_0, b_0 et r; on a des résultats analogues si $a_0=1$, $b_0=-1$ ou si $a_0=-1$ et $b_0=1$.*

De cette proposition qui généralise le théorème de Schottky et celui de Landau, on peut déduire des critères de familles normales bornées. On en déduira un énoncé plus général que celui de Montel donné ci-dessus en introduisant une quatrième combinaison exceptionnelle. A. Bloch donne un résultat analogue pour les systèmes de deux fonctions méromorphes admettant quatre combinaisons exceptionnelles, puis pour les systèmes de ν fonctions avec ν combinaisons exceptionnelles.

La théorie des familles normales ne joue aucun rôle dans la démonstration de ces propositions qui s'obtiennent par les méthodes de la théorie des fonctions entières.

Il est manifeste que l'étude des couples de fonctions admettant des combinaisons linéaires exceptionnelles devra être suivie de celle des couples admettant des combinaisons algébriques exceptionnelles. On pourra se reporter pour ce point au fascicule XX dans lequel A. Bloch donne quelques énoncés (*voir* n° 55).

Signalons enfin qu'à l'énoncé XLVII du fascicule XX correspond ce critère de famille normale dû à Bloch :

Si les fonctions $X = f(z)$ *et* $Y = g(z)$ *sont méromorphes et ne s'annulent pas dans un domaine* D, *si* $X + Y$ *n'est jamais égal à* 1 (*pour* X *ou* Y *infini*, $\frac{Y}{X} \neq -1$) *et si* $|X|^2 + |Y|^2$, $|X|^2 + |Y-1|^2$ *et* $|X-1|^2 + |Y|^2$ *restent supérieurs à un nombre fixe, ces fonctions forment une famille normale.*

BIBLIOGRAPHIE (+).

1. Arzela. — Sulle serie di funzioni (*Mem. della R. Accad. di Bologna*, 5e série, t. 8, 1899).

2. L. Bieberbach. — Ueber die Verteilung der Null- und Einsstellen analytischer Funktionen (*Math. Ann.*, t. 85, 1922).

3. W. Blaschke. — Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen (*Leipzig Sitz. ber.*, t. 67, 1915).

(+) Arrêtée à la rédaction de ce fascicule (janvier 1927).

4. A. Bloch. — (a) Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation (*Comptes rendus*, t. 178, 1924; *Annales Fac. sc. Toulouse*, t. 17, 1925); (b) Sur un théorème de M. Borel et la généralisation du théorème de Picard-Landau (*Comptes rendus*, t. 179, 1924); (c) Sur les fonctions prenant plusieurs fois dans un cercle les valeurs 0 et 1 (*Comptes rendus*, t. 179, 1924); (d) Quelques théorèmes sur les fonctions entières et méromorphes d'une variable (*Comptes rendus*, t. 181, 1925); (e) Sur les systèmes de fonctions uniformes à variétés linéaires lacunaires (*Annales École Norm.*, 3e série, t. 43, 1926); (f) Quelques théorèmes sur les fonctions entières et méromorphes d'une variable (*Comptes rendus*, t. 182, 1926): (g) *Mémorial des Sc. math.* (fasc. XX).

5. H. Bohr. — Ueber einen Satz von Edmund Landau (*Scripta Univ. atque biblioth. Hierosolymitanorum*, t. 1, 1923).

6. E. Borel. — Sur les zéros des fonctions entières (*Acta math.*, t. 20, 1897).

7. P. Boutroux. — Propriétés d'une fonction holomorphe dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs 0 et 1 (*Bull. Soc. math.*, t. 34, 1906).

8. C. Carathéodory. — (a) Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard (*Comptes rendus*, t. 141, 1905); (b) Sur quelques applications du théorème de Landau-Picard (*Comptes rendus*, t. 144, 1905); (c) (en collaboration avec E. Landau) Beiträge zur Konvergenz von Funktionen Folgen (*Sitz. ber. Berliner Akad.*, 1911).

9. P. Fatou. — (a) Séries trigonométriques et séries de Taylor (*Acta math.*, t. 30, 1906); (b) Sur l'évanouissement d'une branche de fonction uniforme aux points d'une ligne singulière (*Bull. Sc. math*, t. 45, 1921); (c) Sur les fonctions holomorphes et bornées à l'intérieur d'un cercle (*Bull. Soc. math.*, t. 51, 1923); (d) Sur l'itération des fonctions transcendantes entières (*Acta math.*, t. 47, 1926); (e) Sur les équations fonctionnelles (*Bull. Soc. math.*, t. 47 et 48, 1919, 1920).

10. M. Fekete. — Zum Koebeschen Verzerrungssatz (*Göttinger Nachr.*, 1925).

11. G. Julia. — (a) Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières et méromorphes (3 mémoires, *Annales École Norm.*, 3e série, t. 36, 1919; t. 37, 1920; t. 38, 1921); (b) Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé (Paris, Gauthier-Villars, 1924).

12. P. Koebe. — (a) Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven (*Göttinger Nachr.*, 1907); (b) Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe (*Göttinger Nachr.*, 1909).

13. E. Landau. — (a) Ueber eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes (*Sitzungsb. Berliner Akad.*, 1904); (b) Ueber den Picardschen Satz (*Viertelj. naturf. Ges. in Zürich*, t. 49, 1904); (c) Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard (*Annales École Norm.*, 3e série, t. 24, 1907); (d) Ueber die Blaschkesche Verallgemeinerung des Vitalischen Satzes (*Leipzig Ber.*, t. 70, 1918); (e) Zum Koebe-

schen Verzerrungssatz (*Rendiconti Circolo mat. di Palermo*, t. 46, 1922); (f) Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Bieberbach « Ueber die Verteilungen der Null- und Einsstellen analytischer Funktionen » (*Math. Ann.*, t. 86, 1922); (g) Ueber einen Bieberbachschen Satz (*Rendiconti Circolo mat. Palermo*, t. 46, 1922); (h) Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante (*Sitz. ber. Berliner Akad.*, 1926).

14. P. Lévy. — Remarques sur le théorème de M. Picard (*Bull. Soc. math.*, t. 40, 1912).

15. E. Lindelöf. — (a) Démonstration nouvelle d'un théorème fondamental sur les suites de fonctions monogènes (*Bull. Soc. math.*, t. 41, 1913); (b) Sur un principe général de l'analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme (*Acta Soc. sc. Fennicæ*, t. 46, 1915).

16. H. Milloux. — (a) Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières (*Journal de Math.*, 9e série t. 3, 1924); (b) Sur le théorème de M. Picard (*Bull. Soc. math.*, t. 53, 1925); (c) Sur une propriété des fonctions méromorphes à valeur asymptotique (*Comptes rendus*, t. 182, 1926).

17. P. Montel. — (a) Sur les suites infinies de fonctions (*Annales École Norm.*, 3e série, t. 24, 1907); (b) Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine (*Annales École Norm.*, 3e série, t. 29, 1912); (c) Sur les familles normales de fonctions analytiques (*Annales École Norm.*, 3e série, t. 33, 1916); (d) Sur la représentation conforme (*Journal de Math.*, 1917); (e) Sur les familles quasi-normales de fonctions holomorphes (*Mém. Acad. Belgique, Classe Sc.*, 2e série, t. 6, 1922); (f) Sur les familles quasi-normales de fonctions analytiques (*Bull. Soc. math.*, t. 52, 1924); (g) Sur les suites de fonctions analytiques qui ont pour limite une constante (*Bull. Soc. math.*, t. 53, 1925); (h) Sur les familles complexes et leurs applications (*Acta math.*, t. 49, 1926); (i) Sur le domaine correspondant aux valeurs d'une fonction analytique (*Comptes rendus*, t. 183, 1926); (j) Sur les domaines correspondant aux valeurs des fonctions analytiques (*Comptes rendus*, t. 183, 1926); (k) Sur les séries de fonctions méromorphes (*Comptes rendus*, t. 183, 1926).

18. F. et R. Nevanlinna. — Ueber die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie (*Acta Soc. sc. Fennicæ*, t. 50, no 5, 1922).

19. R. Nevanlinna. — (a) Sur les fonctions méromorphes (*Comptes rendus*, t. 178, 1924); (b) Zur Theorie der meromorphen Funktionen (*Acta math.*, t. 46, 1925).

20. W. F. Osgood. — Note on the functions defined by infinite series whose terms are analytic functions of a complex variable (*Annals of Math.*, 2e série, t. 3, 1901).

21. A. Ostrowski. — (a) Ueber die Bedeutung der Jensenschen Formel für

einige Fragen der Komplexen Funktionentheorie (*Acta Litt. Ac. sc. Univ. Hung.*, t. 1, 1923); (b) Ueber Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes (*Math. Z.*, t. 24, 1925).

22. E. Picard. — (a) Sur une proposition concernant les fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique (*Bull. Sc. math.*, t. 7, 1883); (b) Démonstration d'un théorème général sur les fonctions uniformes liées par une relation algébrique (*Acta math.*, t. 11, 1887); (c) Sur un théorème général relatif aux fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique (*Comptes rendus*, t. 154, 1912); (d) Sur les systèmes de deux fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique (*Bull. Soc. math.*, t. 40, 1912); (e) Sur les couples de fonctions uniformes d'une variable correspondant aux points d'une courbe algébrique de genre supérieur à l'unité (*Rendiconti Circolo mat. Palermo*, t. 33, 1912).

23. J. Plemelj. — Ueber den Verzerrungssatz von P. Koebe (*Verh. Ges. D. Naturf. u. Arzte*, t. 85, 1913).

24. Porter. — Concerning series of analytic functions (*Annals of Math.*, 2e série, t. 6, 1904).

25. Privalow. — Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen (*Math. Annalen*, t. 93, 1925).

26. G. Rémoundos. — Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes (*Annales Fac. sc. Toulouse*, 2e série, t. 8, 1906).

27. M. et F. Riesz. — Ueber die Randwerte einer analytischer Funktion (*IVe Congrès math. Scandinaves*, 1916); F. Riesz : Ueber subharmonische Funktionen und ihre Rolle in der Funktionentheorie und in der Potentialtheorie (*Acta Litt. Ac. sc. Univ. Hung.*, t. 2, 1924-1926).

28. W. Saxer. — Sur les fonctions méromorphes quasi-exceptionnelles (*Comptes rendus*, t. 184, 1927).

29. F. Schottky. — Ueber den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen (*Sitz. ber. Berliner Akad.*, 1904 et 1906).

30. Severini. — Sulle successioni infinite di funzioni analitiche (*Congrès intern. de Rome*, 1908).

31. T.-J. Stieltjes. — Recherches sur les fractions continues (*Annales Fac. sc. Toulouse*, t. 8, 1894).

32. G. Valiron. — (a) Lectures on the general Theory of integral functions (1923), p. 165; (b) Remarques sur un théorème de M. Julia (*Bull. Sc. math.*, t. 46, 1925); (c) Remarques sur la convergence des suites de fonctions holomorphes (*Bull. Sc. math.*, t. 50, 1926); (d) Sur les fonctions méromorphes qui admettent des valeurs quasi-exceptionnelles (*Assoc. fr. av. sc.*, 1926); (e) Sur les théorèmes de MM. Bloch, Landau, Montel et Schottky (*Comptes rendus*, t. 183, 1926); (f) Sur un théorème de M. Fatou (*Bull. Sc. math.*, t. 46, 1922); (g) Sur les fonctions holomorphes dans un cercle (*Comptes rendus*, t. 183, 1926); (h) Sur un théorème de MM. Koebe et Landau (*Bull. Sc. math.*, t. 51,

1927); (**i**) Sur une propriété des fonctions méromorphes d'ordre positif (*Bull. Sc. math.*, t. 50, 1926); (**j**) Sur les fonctions méromorphes sans valeur asymptotique (*Comptes rendus*, t. 182, 1926); (**k**) Compléments au théorème de Picard-Julia (*Bull. Sc. math.*, t. 51, 1927).

33. DE LA VALLÉE POUSSIN. — Démonstration simplifiée du théorème de M. Montel sur les familles normales de fonctions (*Annals of math.*, 2ᵉ série, t. 17, 1915).

34. VITALI. — (**a**) Sulle serie di funzioni analitiche (*Rend. del R. inst. Lombardo*, 2ᵉ série, t. 36, 1903); (**b**) Sopra le serie di funzioni analitiche (*Ann. di Mat.*, 3ᵉ série, t. 10, 1904).

35. VILLIAMS. — Compléments au théorème de M. Julia (*Rend. Circolo mat. di Palermo*, 1928).

Ouvrages à consulter.

JULIA (**b**).

MONTEL. — Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications (Paris, Gauthier-Villars, 1927).

TABLE DES MATIÈRES.

I. — Introduction.

4/14/70

DATE LOANED

GAYLORD 3563			PRINTED IN U.S.A.


QA 1.M93 fasc38
3 9358 00267935 2



